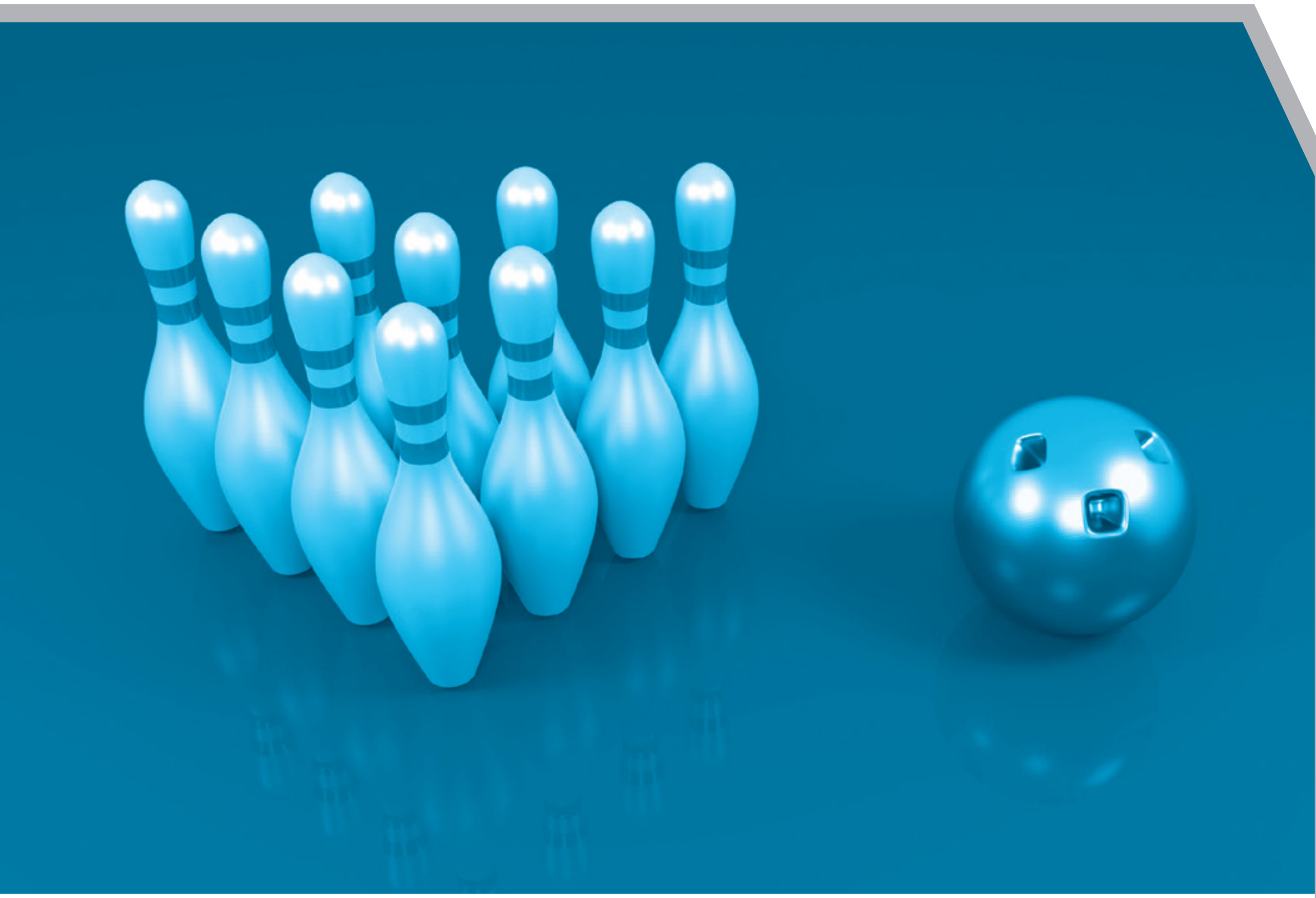
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

ลำดับและอนุกรม



สาระและผลการเรียนรู้

สาระจำนวนและพีชคณิต

เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม และนำไปใช้

ผลการเรียนรู้

1. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก
2. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
3. หาผลบวกอนุกรมอนันต์
4. เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้

ลำดับและอนุกรมมีความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ทางการเงินเป็นอย่างมาก ทั้งนี้คณิตศาสตร์ทางการเงินเป็นเรื่องใกล้ตัวและพบได้ในชีวิตประจำวัน เราสามารถใช้ประโยชน์จากลำดับและอนุกรมในเรื่องของการออมเงิน การหาเงินต้น การหาดอกเบี้ย รวมถึงการคำนวณค่ารายงวดในการซื้อสินค้าเงินผ่อน นอกจากนี้ลำดับและอนุกรมมีความสำคัญกับศาสตร์ในทางวิศวกรรม เช่น ในทางวิศวกรรมไฟฟ้า วิศวกรรมโยธา หรือแม้กระทั่งใช้เป็นส่วนหนึ่งในการพยากรณ์สภาพอากาศในเชิงอุตุนิยมวิทยา

1.1 ลำดับ

จุดประสงค์

1. นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับได้
2. นักเรียนสามารถระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้ ลำดับใดเป็นลำดับเลขคณิต หรือลำดับเรขาคณิต หรือลำดับฮาร์มอนิก และหาพจน์ที่ n ของลำดับได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง
4. การให้เหตุผล
5. การคิดสร้างสรรค์

1.1.1 ความหมายของลำดับ

บทนิยาม

ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, ..., n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ เรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, ..., n\}$ ว่า **ลำดับจำกัด (finite sequence)** และเรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ ว่า **ลำดับอนันต์ (infinite sequence)**

รูปแบบการกำหนดลำดับ

กำหนดลำดับโดยเขียนแจงพจน์ทั้งหมดของลำดับ เหมาะสำหรับลำดับที่มีจำนวนพจน์ไม่มาก

เช่น $1, 5, 9, 13, 17$

$2, 4, 8, 16$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$

กำหนดลำดับโดยเขียนพจน์เริ่มต้นจำนวนหนึ่งพร้อมกับสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับ เหมาะสำหรับลำดับจำกัดที่มีพจน์เป็นจำนวนมากหรือลำดับอนันต์

เช่น $-4, -1, 2, ..., 3n-7$

$1, 3, 9, ..., 3^{n-1}, ...$

$\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, ..., \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, ...$

กำหนดพจน์เริ่มต้นจำนวนหนึ่งพร้อมกับสูตรการหาพจน์ถัดไปจากพจน์ก่อนหน้า เป็นการกำหนดโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation)

เช่น $a_1 = 3; \quad a_{n+1} = a_n-2$

$a_2 = a_1-2 = 3-2 = 1$

$a_3 = a_2-2 = 1-2 = -1$

$a_4 = a_3-2 = -1-2 = -3$

ลำดับคือ $3, 1, -1, -3, ...$

กำหนดลำดับโดยการบอกเงื่อนไขหรือสมบัติของพจน์ของลำดับ เมื่อไม่ทราบสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับและไม่ทราบความสัมพันธ์เวียนเกิด

(1) $4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 6, 2, ...$ คือ ลำดับ a_k เมื่อ a_k เป็นทศนิยมตำแหน่งที่ k ของ $\sqrt{2}$ ซึ่งเท่ากับ 1.414213562...

(2) $7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, ...$ คือ ลำดับ b_k เมื่อ b_k เป็นทศนิยมตำแหน่งที่ k ของ e ซึ่งเท่ากับ 2.718281828...

แบบฝึกหัดที่ 1.1.1

จงหาห้าพจน์ถัดไปของลำดับ a_n ที่กำหนดโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดต่อไปนี้

1. $a_1 = 1, a_2 = 1$ และ $a_{n+1} = a_{n-1}+a_n$ เมื่อ $n \geqslant 2$

วิธีทำ เมื่อ $n = 2;$ $\quad a_3 = a_1+a_2$

$= 1+1 = 2$

เมื่อ $n = 3;$ ....

$=$ ....

เมื่อ $n = 4;$ $\quad a_5 =$ ....

$=$ ....

เมื่อ $n = 5;$ $a_6 = $ ....

$= $ ....

เมื่อ $n = 6;$ $a_7 = $ ....

$= $ ....

ลำดับคือ ....

2. $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ และ $a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$ เมื่อ $n \geqslant 1$

วิธีทำ เมื่อ $n = 1;$ $a_3 = 2a_1 + a_2$

$= 2(1)+1 = 3$

เมื่อ $n = 2;$ $a_4 = $ ....

$= $ ....

เมื่อ $n = 3;$ $a_5 = $ ....

$= $ ....

เมื่อ $n = 4;$ $a_6 = $ ....

$= $ ....

เมื่อ $n = 5;$ $a_7 = $ ....

$= $ ....

ลำดับคือ ....

3. $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ และ $a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}$ เมื่อ $n \geqslant 1$

วิธีทำ เมื่อ $n = 1;$ $a_3 = a_1 + 2a_2$

$= $ ....

เมื่อ $n = 2;$ $a_4 = $ ....

$= $ ....

เมื่อ $n = 3;$ $a_5 = $ ....

$= $ ....

เมื่อ $n = 4;$ $a_6 = $ ....

$= $ ....

เมื่อ $n = 5;$ $a_7 = $ ....

$= $ ....

ลำดับคือ ....

4. $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ และ $a_{n+2} = 3a_{n+1}+2a_n$ เมื่อ $n \geqslant 1$

วิธีทำ เมื่อ $n = 1;$ $a_3 = 3a_2+2a_1$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

เมื่อ $n = 2;$ $a_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

เมื่อ $n = 3;$ $a_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

เมื่อ $n = 4;$ $a_6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

เมื่อ $n = 5;$ $a_7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ลำดับคือ ....

1.1.2 ลำดับเลขคณิต

บทนิยาม

ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับซึ่งมีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n+1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นผลต่างนี้ว่า **ผลต่างร่วม**

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิต ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงตัว d โดยที่ $d = a_{n+1}-a_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น $$a_n = a_1+(n-1)d$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดลำดับเลขคณิต 9, 13, 17, 21, ... จงหา

(1) พจน์ที่ n (2) พจน์ที่ 10 และพจน์ที่ 20

วิธีทำ จากลำดับ 9, 13, 17, 21, ...

$a_1 = 9,\ d = 13-9 = 17-13 = \ldots = 4$

(1) พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต $a_n = a_1+(n-1)d$

แทนค่า จะได้ $a_n = 9+(n-1)(4)$

$a_n = 4n+5$ **ตอบ**

(2) พจน์ที่ 10 คือ

$$a_{10} = 4(10)+5$$
$$a_{10} = 45$$

พจน์ที่ 20 คือ

$$a_{20} = 4(20)+5$$
$$a_{20} = 85$$

ตอบ

แบบฝึกหัดที่ 1.1.2

1. กำหนดลำดับเลขคณิต จงพจน์ที่ n และพจน์ที่กำหนด

(1) 13, 2, −9, ...

วิธีทำ a_1 = ..., d = ...

$a_n = a_1+(n-1)d$

= ....

= ....

= ....

a_{53} = ...

= ....

(2) −11, −5.5, 0, ...

วิธีทำ a_1 = ..., d = ...

a_n = ...

= ....

= ....

= ....

a_{230} = ...

= ....

2. ถ้า x, A, y เป็นลำดับเลขคณิต

จะได้

$$A-x = y-A$$
$$2A = x+y$$
$$\boxed{A = \frac{x+y}{2}}$$

จงหาพจน์กลางระหว่างสองพจน์ในลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

(1) $-\frac{3}{4}$ และ $\frac{9}{8}$

วิธีทำ พจน์กลางระหว่าง $-\frac{3}{4}$ และ $\frac{9}{8}$ คือ $\dfrac{-\frac{3}{4}+\frac{9}{8}}{2}$

= ....

= ....

= ....

(2) $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ และ $\frac{1}{1-\sqrt{x}}$

วิธีทำ พจน์กลางระหว่าง $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ และ $\frac{1}{1-\sqrt{x}}$ คือ ....

= ....

= ....

= ....

3. จงหาพจน์กลาง 3 พจน์ที่อยู่ระหว่างสองพจน์ของลำดับเลขคณิต $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$, p, q, r, $\frac{1+3\sqrt{x}}{1-x}$

วิธีทำ พจน์แรกของลำดับคือ $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ (ทำให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์)

ดังนั้น $a_1 = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

$\frac{1+3\sqrt{x}}{1-x}$ เป็นพจน์ที่ 5 ของลำดับ

ดังนั้น $a_5 = a_1+4d = \frac{1+3\sqrt{x}}{1-x}$

แทนค่า a_1; $\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}+4d = \frac{1+3\sqrt{x}}{1-x}$

$4d = \frac{4\sqrt{x}}{1-x}$

$d =$ ....

ดังนั้น $p = a_1+d = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} +$ ....

$q = a_1+2d = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} +$ ....

$r = a_1+3d = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} +$ ....

4. กำหนดลำดับเลขคณิต 9, 13, 17, 21, ... จงหา

(1) พจน์ที่ n (2) พจน์ที่ 10

(3) 229 เป็นพจน์ที่เท่าไรของลำดับ

วิธีทำ จากลำดับ 9, 13, 17, 21, ...

$a_1 = 9,\ d = 13-9 = 17-13 = ... = 4$

(1) พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต $a_n = a_1+(n-1)d$

แทนค่า จะได้ $a_n = 9+(n-1)(4)$

$a_n =$ ....

ดังนั้น $a_n =$ ....

(2) พจน์ที่ 10 คือ $a_{10} = a_1+9d$ หรือ $a_n = 4n+5$

$a_{10} =$ .... $a_{10} = 4(10)+5$

$a_{10} =$ .... $a_{10} =$ ....

$a_{10} =$ .... $a_{10} =$ ....

(3) ให้ 229 เป็นพจน์ที่ n ของลำดับ 9, 13, 17, 21, ...

$a_n = a_1+(n-1)d$ หรือ $a_n = 4n+5$

$229 = 9+(n-1)(4)$ $229 = 4n+5$

....

....

....

ดังนั้น 229 เป็นพจน์ที่ .... ของลำดับ 9, 13, 17, 21, ...

5. ถ้าผลบวกสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งเท่ากับ $\frac{1}{2}$ และผลบวกของกำลังสามของแต่ละพจน์ในลำดับนี้เท่ากับ $\frac{1}{8}$ จงหาลำดับนี้

วิธีทำ ให้ $a-d,\ a,\ a+d$ เป็นสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้

ผลบวกของสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิตเท่ากับ $\frac{1}{2}$

ดังนั้น $(a-d)+a+(a+d)$ ....

$3a$ ....

a ....

ผลบวกของกำลังสามของแต่ละพจน์ในลำดับนี้เท่ากับ

ดังนั้น $(a-d)^3+a^3+(a+d)^3$ = ...

$a^3-3a^2d+3ad^2-d^3+a^3+$ .... = ...

$3a^3+6ad^2$ = ...

$3a(a^2+2d^2)$ = ...

หาค่า d; .... = ...

.... = ...

.... = ...

.... = ...

.... = ...

เมื่อ d $=$ .... สามพจน์แรกของลำดับคณิตนี้คือ

$\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$ หรือ ....

เมื่อ d $=$ .... สามพจน์แรกของลำดับคณิตนี้คือ

....

1.1.3 ลำดับเรขาคณิต

บทนิยาม

ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับซึ่งมีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n+1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นอัตราส่วนนี้ว่า **อัตราส่วนร่วม**

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงตัว r โดยที่ $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น

$$a_n = a_1r^{n-1}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดลำดับเรขาคณิต $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$ จงหา

(1) พจน์ที่ n (2) พจน์ที่ 6 และพจน์ที่ 10

วิธีทำ จากลำดับ $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$

$a_1 = 1,\ r = \frac{2}{3} \div 1 = \frac{4}{9} \div \frac{2}{3} = \ldots = \frac{2}{3}$

(1) พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต $a_n = a_1 r^{n-1}$

แทนค่า จะได้ $a_n = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **ตอบ**

(2) พจน์ที่ 6 คือ $a_6 = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{6-1}$

$a_6 = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$

$a_6 = \frac{32}{243}$ **ตอบ**

พจน์ที่ 10 คือ $a_{10} = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-1}$

$a_{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{9}$

$a_{10} = \frac{512}{19683}$ **ตอบ**

แบบฝึกหัดที่ 1.1.3

1. จงหาอัตราส่วนร่วม พจน์ที่ n และพจน์ที่กำหนด

(1) $a_3 = -2,\ a_5 = -\frac{9}{2}$

วิธีทำ $a_3 = -2$

$a_1 r^2 =$ ....(1)

$a_5 =$

$a_1 r^4 =$ ....(2)

(2) $a_5 = 17,\ a_9 = 272$

วิธีทำ $a_5 = 17$

$a_1 r^4 =$ ....(1)

$a_9 = 272$

$a_1 r^8 =$ ....(2)

$(2)\div(1);\ r^2 = \text{..........}$	$(2)\div(1);\ r^4 = \text{..........}$
$r = \text{..........}$	$r = \text{..........}$
จาก $(1);\ a_1 = \text{..........}$	จาก $(1);\ a_1 = \text{..........}$
$a_n = a_1r^{n-1}$	$a_n = a_1r^{n-1}$
$= \text{..........}$	$= \text{..........}$
$a_9 = \text{..........}$	$a_{10} = \text{..........}$
$= \text{..........}$	$= \text{..........}$

2. ถ้า x, G, y เป็นลำดับเรขาคณิต

จะได้

$$\frac{G}{x} = \frac{y}{G}$$

$$G^2 = xy$$

$$\boxed{G = \pm\sqrt{xy}}$$

จงหาพจน์กลางระหว่างสองพจน์ในลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้

(1) -121 และ -484

วิธีทำ พจน์กลางระหว่าง -121 และ -484 คือ

$$\pm\sqrt{(-121)(-484)} = \text{..........}$$

$$= \text{..........}$$

(2) $\sqrt{\frac{4}{3}}$ และ $\sqrt{\frac{64}{27}}$

วิธีทำ พจน์กลางระหว่าง $\sqrt{\frac{4}{3}}$ และ $\sqrt{\frac{64}{27}}$ คือ

$$\pm\sqrt{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{64}{27}}\right)} = \text{..........}$$

$$= \text{..........}$$

$$= \text{..........}$$

3. จงหาพจน์กลาง 3 พจน์ที่อยู่ระหว่างสองพจน์ของลำดับเรขาคณิต $-3,\ x,\ y,\ z,\ -\frac{1}{27}$

วิธีทำ พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตคือ $a_n = a_1r^{n-1}$

-3 เป็นพจน์แรก และ $-\frac{1}{27}$ เป็นพจน์ที่ 5 ของลำดับเรขาคณิต

ดังนั้น $a_1 =$ ....

$a_5 = a_1r^4 =$ ....

แทนค่า a_1; ....

....

$r =$ ....

ดังนั้น $x = a_1r =$ ....

$y = \quad =$ ....

$z = \quad =$ ....

4. จงเติมพจน์ที่หายไปของลำดับเรขาคณิต

(1) 6, ..., ..., 48

(2) ...., $-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}$, ...

(3) -2, ..., $-\frac{2}{9}$, ...

(4) $\frac{8}{25}, \frac{4}{5}$, ..., ...

5. ลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้ลำดับใดเป็นลำดับเลขคณิตและลำดับใดเป็นลำดับเรขาคณิต ถ้าเป็นลำดับเลขคณิตให้บอกค่า d ถ้าเป็นลำดับเรขาคณิตให้บอกค่า r

(1) $\frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{3}{32}, \frac{9}{128}$ ....

(2) 7.25, 9.5, 11.75, 14 ....

(3) $-8.25, -8.5, -8.75$ ....

(4) $-\frac{5}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{25}, -\frac{2}{125}$ ....

6. กำหนดให้ 4, x, 10 เป็นสามพจน์เรียงกันในลำดับเลขคณิต และ 4, x, y เป็นสามพจน์เรียงกันในลำดับเรขาคณิต จงหาค่าของ x และ y

วิธีทำ 4, x, 10 เป็นลำดับเลขคณิต

ดังนั้น $x =$ ....

4, x, y เป็นลำดับเรขาคณิต

ดังนั้น $x^2 =$ ....

....

....

....

7. จงหาผลคูณ n พจน์แรก และ 10 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิต $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

วิธีทำ พจน์ที่ n ของลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ คือ $1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ผลคูณ n พจน์แรกคือ $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 1 \times 2^{-1} \times 2^{-2} \times 2^{-3} \times \dots \times 2^{-(n-1)}$

$= 2^{-[0+1+2+3+\dots+(n-1)]}$

$1+2+3+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1)$

$=$ ....

ผลคูณ 10 พจน์แรกเท่ากับ $2^{-\frac{10}{2}(10-1)} =$ ....

....

....

8. โทรศัพท์มือถือเครื่องหนึ่งราคา 15,000 บาท เมื่อเวลาผ่านไป 1 ปี ราคาจะลดลง 25% ของราคาของปีที่ผ่านมาเป็นเช่นนี้เรื่อยไป เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี โทรศัพท์มือถือเครื่องนี้จะมีราคาเท่าไร

วิธีทำ ปีแรกราคา 15,000 บาท เมื่อเวลาผ่านไป 1 ปี จะมีราคา $15{,}000 \times \frac{75}{100}$ บาท

ปีที่สองราคา $15{,}000 \times \frac{75}{100}$ บาท เมื่อเวลาผ่านไป 2 ปี จะมีราคา

$\left(15{,}000 \times \frac{75}{100}\right) \times \frac{75}{100}$ บาท $= 15{,}000\left(\frac{75}{100}\right)^2$ บาท

เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี โทรศัพท์จะมีราคา..

....

....

....

หมายเหตุ

เราอาจหาราคาเมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี (ราคาในปีที่ 6) โดยใช้สูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$ ซึ่งคำตอบที่ได้เท่ากัน

9. ฝากเงิน 10,000 บาท ไว้กับธนาคารแห่งหนึ่ง โดยธนาคารให้ดอกเบี้ยร้อยละ 5 ต่อปี จงหาเงินรวมเมื่อฝากครบ 5 ปี

วิธีทำ เงินต้น 100 บาท ครบปี ได้เงินรวม $100+5$ บาท

ปีที่ 1 เงินต้น 10,000 บาท ครบปีได้เงินรวม $10{,}000\left(\frac{105}{100}\right)$ บาท

ปีที่ 2 เงินต้น $10{,}000\left(\frac{105}{100}\right)$ บาท ครบปีได้เงินรวม $10{,}000\left(\frac{105}{100}\right)\left(\frac{105}{100}\right)$ บาท

$= 10{,}000\left(\frac{105}{100}\right)^2$ บาท

ในทำนองเดียวกัน ครบปีที่ 5 ได้เงินรวม ....

....

....

....

10. ซื้อรถยนต์คันหนึ่งราคา 1,200,000 บาท เมื่อใช้ไปแล้วราคาของรถยนต์จะลดลงปีละ 60,000 บาท จงหาราคาของรถยนต์คันนี้ในปีที่ 6

วิธีทำ

ปีที่ 1 รถยนต์ราคา	$1{,}200{,}000$	บาท
ปีที่ 2 รถยนต์ราคา	$1{,}200{,}000-60{,}000$	บาท
ปีที่ 3 รถยนต์ราคา	$1{,}200{,}000-2(60{,}000)$	บาท

ในทำนองเดียวกัน ปีที่ 6 รถยนต์ราคา ....

....

....

11. จงหาผลคูณ n พจน์แรกของลำดับเรขาคณิต 1, 2, 4, 8, ...

วิธีทำ พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตคือ $a_n = a_1r^{n-1}$

พจน์ที่ n ของลำดับ 1, 2, 4, 8, ... คือ $a_n =$ ....

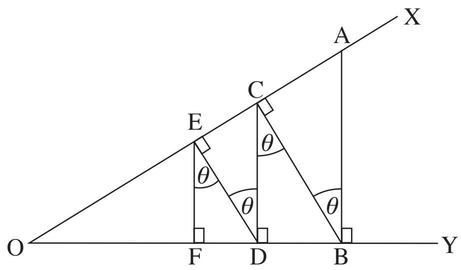
ผลคูณ n พจน์แรกเท่ากับ ....

....

....

....

12.



จากรูป $\overline{AB}$ ตั้งฉากกับ $\overline{OY}$, $\overline{BC}$ ตั้งฉากกับ $\overline{OX}$, $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{OY}$, $\overline{DE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{OX}$ และ $\overline{EF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{OY}$ ถ้า AB = 10 และ BC = 9 จงหาความยาวของ $\overline{EF}$

วิธีทำ ในรูปสามเหลี่ยม ABC; $\cos\theta$ = ...(1)

ในรูปสามเหลี่ยม BCD; $\cos\theta$ = ...(2)

จาก (2); CD = ...(3)

แทนค่า (1) ใน (3); CD = ...(4)

ในรูปสามเหลี่ยม CDE; $\cos\theta$ = ...(5)

จาก (5); DE = ...(6)

แทนค่า (1) และ (4) ใน (6); DE = ...

= ....

ในทำนองเดียวกัน EF = ...

1.1.4 ลำดับฮาร์มอนิก

บทนิยาม

ถ้า $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1+d}, \frac{1}{a_1+2d}, ..., \frac{1}{a_1+(n-1)d}$ เป็นพจน์ที่ 1, 2, 3, ..., n ในลำดับฮาร์มอนิก จะได้ว่า

$a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1)d$ เป็นพจน์ที่ 1, 2, 3, ..., n ในลำดับเลขคณิต

แบบฝึกหัดที่ 1.1.4

1. กำหนดให้ $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13}, \frac{1}{18}, ...$ เป็นลำดับฮาร์มอนิก จงหาพจน์ที่ n และพจน์ที่ 10

วิธีทำ $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13}, \frac{1}{18}, ...$ เป็นลำดับฮาร์มอนิก

ดังนั้น 3, 8, 13, 18, ... เป็นลำดับเลขคณิต

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1+(n-1)d$

แทนค่า จะได้ $a_n = $ ....

$a_n = $ ....

และ $a_{10} = $ ....

$a_{10} = $ ....

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับ $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13}, \frac{1}{18}, ...$ คือ ....

พจน์ที่ 10 ของลำดับ $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13}, \frac{1}{18}, ...$ คือ ....

2. ถ้า x, H, y เป็นลำดับฮาร์มอนิก

ดังนั้น $\frac{1}{x}, \frac{1}{H}, \frac{1}{y}$ เป็นลำดับเลขคณิต

จะได้

$$\frac{1}{H}-\frac{1}{x} = \frac{1}{y}-\frac{1}{H}$$

$$\frac{2}{H} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

$$\frac{2}{H} = \frac{x+y}{xy}$$

$$\boxed{H = \frac{2xy}{x+y}}$$

จงหาพจน์กลางระหว่าง 5 และ 20 ในลำดับฮาร์มอนิก

วิธีทำ พจน์กลางระหว่าง 5 และ 20 ในลำดับฮาร์มอนิก คือ ....

3. ตัวกลางเลขคณิตและตัวกลางฮาร์มอนิกของจำนวนสองจำนวนเท่ากับ 27 และ 12 ตามลำดับ จงหาตัวกลางเรขาคณิตของจำนวนทั้งสองนี้

วิธีทำ ให้จำนวนทั้งสองคือ a และ b

ตัวกลางเลขคณิตเท่ากับ 27

ดังนั้น ....

....

ตัวกลางฮาร์มอนิกเท่ากับ 12

ดังนั้น ....

....

....

....

ตัวกลางเรขาคณิตคือ $\pm\sqrt{ab}$ $=$ ....

....

4. ถ้าพจน์ที่ 3 และพจน์ที่ 6 ของลำดับฮาร์มอนิกเท่ากับ $\frac{6}{11}$ และ $\frac{6}{5}$ ตามลำดับ แล้วพจน์แรกของลำดับฮาร์มอนิกนี้เท่ากับเท่าไร

วิธีทำ พจน์ที่ 3 และพจน์ที่ 6 ของลำดับฮาร์มอนิกเท่ากับ $\frac{6}{11}$ และ $\frac{6}{5}$

จะได้พจน์ที่ 3 และพจน์ที่ 6 ของลำดับฮาร์มอนิกเท่ากับ ....

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1+(n-1)d$

แทนค่าจะได้ ....

....(1)

และ ....

....(2)

$(2)-(1)$; ....

....

แทนค่า $d =$ .... ใน (1) จะได้ ....

....

ดังนั้น พจน์แรกของลำดับฮาร์มอนิกนี้เท่ากับ ....

1.2 ลิมิตของลำดับอนันต์

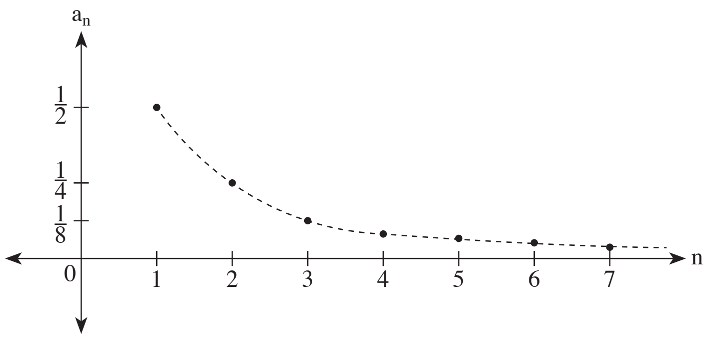
จุดประสงค์

1. นักเรียนสามารถระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก
2. นักเรียนสามารถหาลิมิตของลำดับอนันต์ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

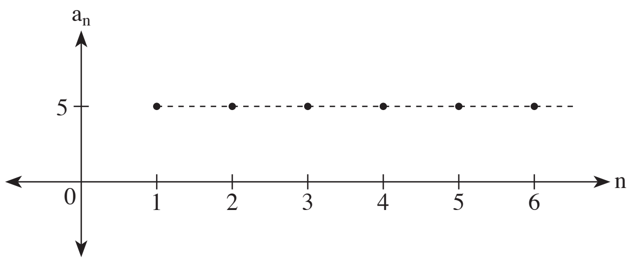
1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง
3. การให้เหตุผล
4. การคิดสร้างสรรค์

(1) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$



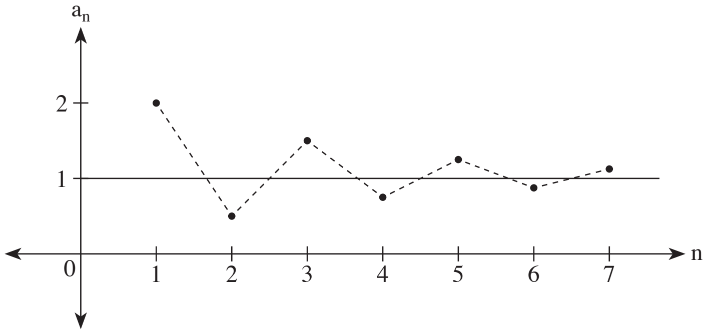
ถ้า n มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด แล้ว a_n มีค่าลดลงใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0

(2) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = 5$



ถ้า n มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด แล้ว a_n มีค่าเท่ากับ 5 เสมอ

(3) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$



ถ้า n มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด แล้ว a_n มีค่าเข้าใกล้ 1 แต่ไม่เท่ากับ 1

เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น เรียก L ว่า **ลิมิตของลำดับ (Limit of sequence)**

และกล่าวว่าลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ L เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (อ่านว่า ลิมิตของลำดับ a_n เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดเท่ากับ L)

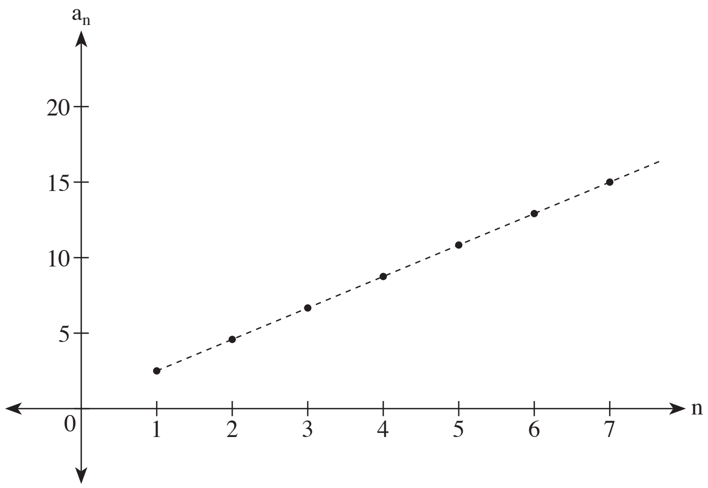
ลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$ มีลิมิตเท่ากับ 0 เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

ลำดับ $a_n = 5$ มีลิมิตเท่ากับ 5 เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} 5 = 5$

ลำดับ $a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$ มีลิมิตเท่ากับ 1 เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{(-1)^n}{n}\right] = 1$

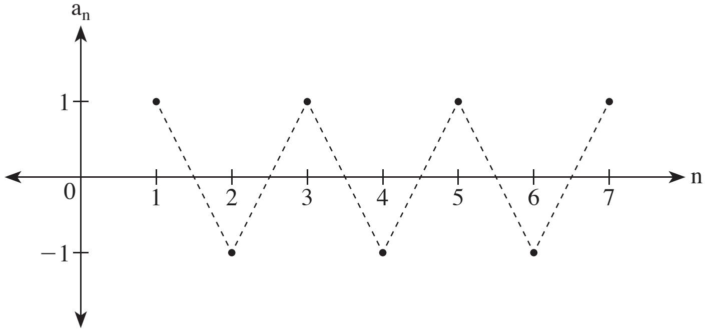
เรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า **ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)**

(4) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = 2n+1$



ถ้า n มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับมีค่ามากขึ้นไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง ลำดับนี้จึงไม่มีลิมิตและไม่เป็นลำดับลู่เข้า เรียกลำดับอนันต์นี้ว่า **ลำดับลู่ออก (divergent sequence)**

(5) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = (-1)^{n-1}$



เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ $a_n = 1$ และเมื่อ n เป็นจำนวนคู่ $a_n = -1$

เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับนี้ไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง ลำดับนี้จึงไม่มีลิมิต จึงเป็นลำดับลู่ออก เรียกลำดับลู่ออกนี้ว่า **ลำดับกวัดแกว่ง (oscillating sequence)**

ข้อสังเกตเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ

1. ลำดับที่จะนำมาพิจารณาลิมิตต้องเป็นลำดับอนันต์
2. ลำดับที่มีลิมิต เรียกว่า ลำดับลู่เข้า ลำดับที่ไม่มีลิมิต เรียกว่า ลำดับลู่ออก
3. การพิจารณาว่าลำดับใดจะมีลิมิตหรือไม่ อาจทำได้โดยการพิจารณากราฟของลำดับ

ทฤษฎีบท

ให้ n เป็นจำนวนจริง

ถ้า $|r| < 1$ $(-1 < r < 1)$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

ถ้า $|r| > 1$ ($r \leqslant -1$ หรือ $r > 1$) แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ หาค่าไม่ได้

ถ้า $r = 1$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 1$

เช่น 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ หาค่าไม่ได้

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ หาค่าไม่ได้

ทฤษฎีบท

ให้ a_n, b_n, t_n เป็นลำดับของจำนวนจริง A, B เป็นจำนวนจริง และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ โดย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $t_n = c$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} c = c$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = cA$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A+B$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A-B$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = AB$

(6) ถ้า $b_n \neq 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และ $B \neq 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ จาก a_n ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

วิธีทำ (1) $a_n = 8$

เนื่องจาก 8 เป็นค่าคงตัว ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} 8 = 8$ **ตอบ**

(2) $a_n = \frac{8}{n}$

เนื่องจาก $\frac{8}{n} = 8\left(\frac{1}{n}\right)$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8}{n} = 8\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8}{n} = 8(0) = 0$ **ตอบ**

(3) $a_n = \frac{2n^2+n}{3n^2}$

เนื่องจาก $\frac{2n^2+n}{3n^2} = \qquad = $

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{3n^2} = $

$=$

$=$

$=$ **ตอบ**

(4) $a_n = \frac{(n-1)(n+2)}{2n^2}$

วิธีที่ 1 $a_n =$

$=$

$=$

$=$

$\lim_{n\to\infty} a_n =$

$=$

$=$ **ตอบ**

วิธีที่ 2 $a_n =$

$=$

$=$

$\lim_{n\to\infty} a_n =$

$=$

$=$

$=$ **ตอบ**

ทฤษฎีบท

ให้ a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 และให้ m เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

แล้ว $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาลำดับ $a_n = \sqrt[3]{\frac{n^2-27n}{8n^2+3n}}$ ว่าเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า จงหาลิมิตของลำดับ

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-27n}{8n^2+3n} =$

$=$

$=$

$=$

$=$

จะได้ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2-27n}{8n^2+3n}} =$

$=$

$=$

ดังนั้น ลำดับ $a_n = \sqrt[3]{\frac{n^2-27n}{8n^2+3n}}$ เป็นลำดับลู่เข้า และมีลิมิตเป็น **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณาลำดับ $b_n = \frac{n^2-2n}{n}$ ว่าเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า จงหาลิมิตของลำดับ

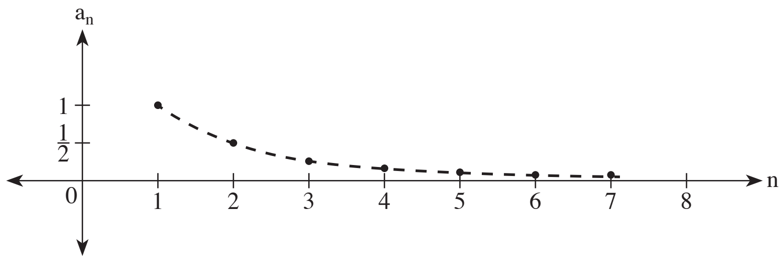
วิธีทำ เนื่องจาก
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-2)}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} (n-2) \quad \text{หาค่าไม่ได้}$$

ดังนั้น ลำดับ $b_n = \frac{n^2-2n}{n}$ เป็นลำดับลู่ออก ไม่มีลิมิต **ตอบ**

แบบฝึกหัดที่ 1.2

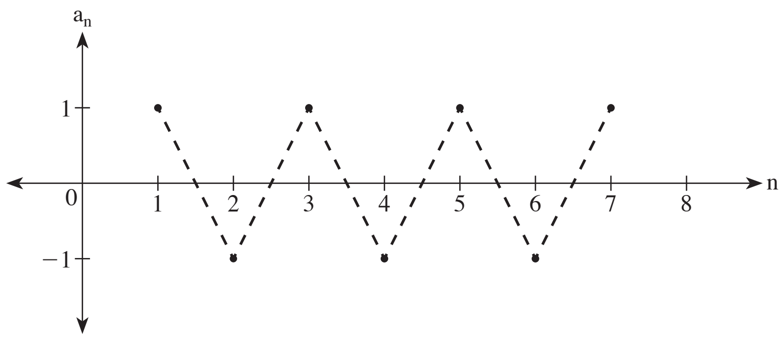
1. จงเขียนกราฟเพื่อตรวจสอบว่าลำดับใดเป็นลำดับลู่เข้า ลำดับใดเป็นลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า จงหาลิมิตของลำดับนั้น

(1) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$



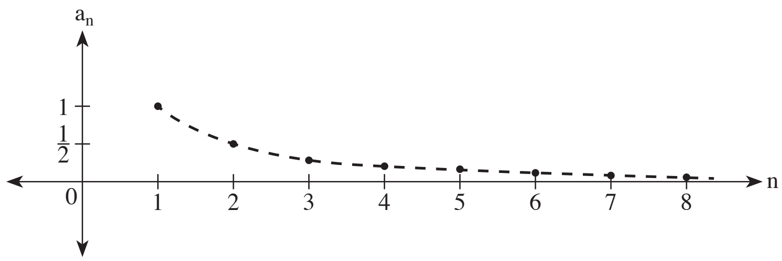
เป็นลำดับ .... $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ = ...

(2) $a_n = (-1)^{n+1}$ $(1, -1, 1, -1, \ldots)$



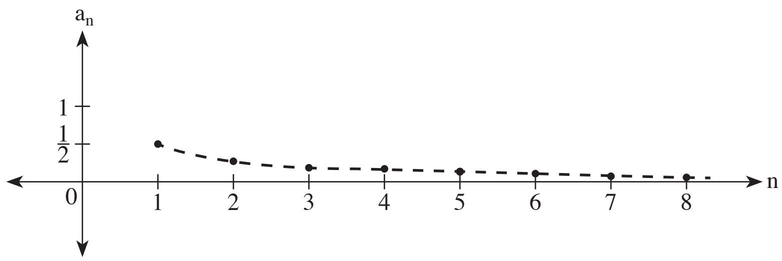
เป็นลำดับ ....

(3) $a_n = \frac{1}{n}$ $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$



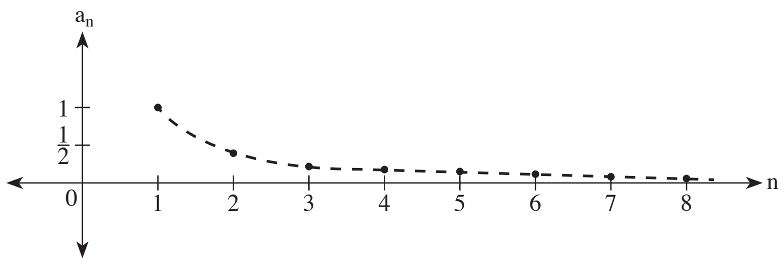
เป็นลำดับ ....

(4) $a_n = \frac{1}{2n}$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, ...\right)$



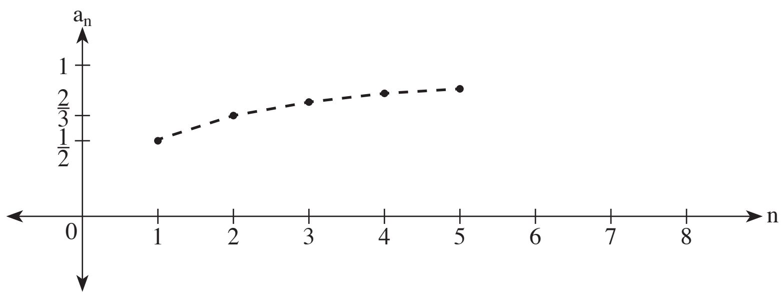
เป็นลำดับ ....

(5) $a_n = \frac{1}{2n-1}$ $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, ...\right)$



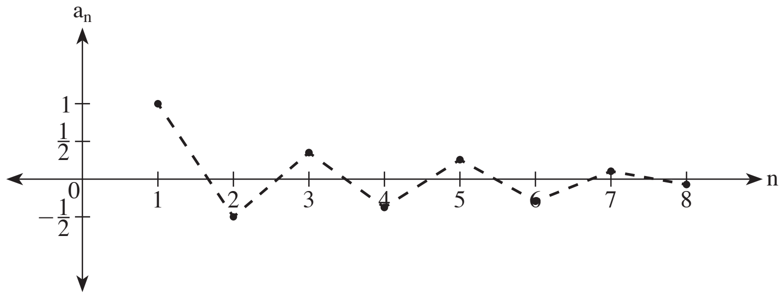
เป็นลำดับ ....

(6) $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...\right)$



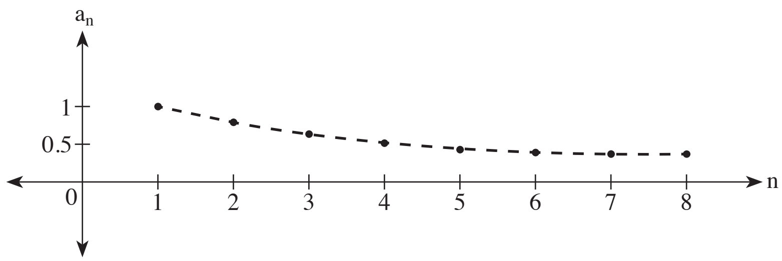
เป็นลำดับ ....

(7) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ....



เป็นลำดับ ....

(8) $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ ....



เป็นลำดับ ....

2. จงใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับตรวจสอบว่าลำดับในข้อใดเป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก

(1) $a_n = \frac{-3}{5n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3}{5n} = -\frac{3}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$$= -\frac{3}{5}(0)$$

$$= \text{....................}$$

เป็นลำดับ ....

(2) $a_n = \frac{2^n}{3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \text{....................}$$

เป็นลำดับ ....

(3) $a_n = -\left(\frac{4}{3}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} -\left(\frac{4}{3}\right)^n = -\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

....

เป็นลำดับ ....

(4) $a_n = 5\left(\frac{1}{2^n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} 5\left(\frac{1}{2^n}\right) = 5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \text{...}$$

$$= \text{...}$$

เป็นลำดับ ....

(5) $a_n = 1-\frac{2}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$$= \text{...}$$

$$= \text{...}$$

เป็นลำดับ ....

(6) $a_n = \frac{4n-3}{3n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{3n}$$

$$= \text{...}$$

$$= \text{...}$$

$$= \text{...}$$

$$= \text{...}$$

เป็นลำดับ ....

(7) $a_n = \dfrac{3-5n^2}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-5n^2}{n^2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n^2}-5\right)$

$= 3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} 5$

= ....

= ....

เป็นลำดับ ....

(8) $a_n = \dfrac{3n^2-2n-1}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-2n-1}{n^2}$

= ....

= ....

= ....

= ....

เป็นลำดับ ....

(9) $a_n = \dfrac{4n^2+1}{3n-n^2}$

$= \dfrac{n^2\left(4+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\dfrac{3}{n}-1\right)}$

$= \dfrac{4+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3}{n}-1}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+1}{3n-n^2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3}{n}-1}$

= ....

= ....

เป็นลำดับ ....

(10) $a_n = \dfrac{n^2+2n+1}{2n^2+1}$

$= \dfrac{n^2\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}$

= ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+1}{2n^2+1}$

= ....

= ....

= ....

เป็นลำดับ ....

(11) $a_n = \dfrac{2^{n+1}-3^n}{3^{n+1}}$

$= \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} - \dfrac{3^n}{3^{n+1}}$

= ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}-3^n}{3^{n+1}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3}$

= ....

เป็นลำดับ ....

(12) $a_n = \dfrac{2^n}{3^n-5}$

$= \dfrac{\dfrac{2^n}{3^n}}{\dfrac{3^n-5}{3^n}}$

= ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{3^n-5}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{5}{3^n}}$

= ....

เป็นลำดับ ....

(13) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2-3}}{3n}$

$= \sqrt{\dfrac{n^2-3}{9n^2}}$

= ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-3}}{3n}$

= ....

= ....

เป็นลำดับ ....

(14) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}-n}{\sqrt{n^2+1}}$

$= \dfrac{\dfrac{\sqrt{n}-n}{n}}{\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^2}}}$

= ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}-n}{\sqrt{n^2+1}}$

= ....

= ....

เป็นลำดับ ....

(15) $a_n = \dfrac{n^2+5}{\sqrt{4n^4+n}}$

$= \dfrac{n^2\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\sqrt{4+\frac{1}{n^3}}}$

$=$ ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5}{\sqrt{4n^4+n}}$

$=$ ....

$=$ ....

เป็นลำดับ ....

(16) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{2n^5-n^2+4}}{n^2+1}$

$=$ ......

$=$ ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2n^5-n^2+4}}{n^2+1}$

$=$ ....

$=$ ....

เป็นลำดับ ....

(17) $a_n = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}$

$= \left(\dfrac{n-1}{n}\right)\left(\dfrac{n-2}{n}\right)\left(\dfrac{n-3}{n}\right)$

$=$ ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

เป็นลำดับ ....

(18) $a_n = \dfrac{(4n^2-1)(n^2-4)}{n^4}$

$= \left(\dfrac{4n^2-1}{n^2}\right)\left(\dfrac{n^2-4}{n^2}\right)$

$=$ ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4n^2-1)(n^2-4)}{n^4}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

เป็นลำดับ ....

(19) $a_n = \dfrac{\sqrt{9n^2-1}}{2n+\sqrt[3]{n^3+2}}$

$= \dfrac{n\sqrt{9-\frac{1}{n^2}}}{n\left(2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}\right)}$

$=$ ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9n^2-1}}{2n+\sqrt[3]{n^3+2}}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

เป็นลำดับ ....

(20) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})$

$= \sqrt{n}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})\cdot\dfrac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}$

$= \dfrac{\sqrt{n}[(\sqrt{n+a})^2-(\sqrt{n})^2]}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

เป็นลำดับ ....

3. จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

(1)
$$a_n = \frac{n^3}{2n^2-1} - \frac{n^2}{2n+1}$$
$$= n^2\left[\frac{n}{2n^2-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$$
$$= n^2\left[\frac{(2n^2+n)-(2n^2-1)}{(2n^2-1)(2n+1)}\right]$$
$= $ ....

$= $ ....

$= $ ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{2n^2-1} - \frac{n^2}{2n+1}\right)$

$= $ ....

$= $ ....

(2)
$$a_n = \sqrt[3]{\frac{2n^2}{n^2+8n-1}}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{2n^2}{n^2\left(1+\frac{8}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}}$$
$= $ ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{2n^2}{n^2+8n-1}}$

$= $ ....

$= $ ....

$= $ ....

(3)
$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$$
$$= \frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{\frac{n^2}{n}}}{\sqrt[4]{n^4\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}-n}$$
$$= \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n\sqrt{\frac{1}{n}}}{n\sqrt[4]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}-n}$$

(4)
$$a_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$
$= $ ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(5) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

$= \dfrac{\sqrt{\frac{n}{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n}+\sqrt{\frac{n}{n^2}+\sqrt{\frac{n}{n^4}}}}}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(6) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1+\sqrt{n+1}}}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1+\sqrt{n+1}}}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(7)

$$a_n = \frac{2n^3-3n-4}{\sqrt{n^4+1}}$$

$$= \frac{2n^3-3n-4}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}$$

$$= \frac{n^2\left(2n-\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}$$

= ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n-4}{\sqrt{n^4+1}}$ ....

(8)

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n+1}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{n^3\left(n+\frac{1}{n^3}\right)}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

= ....

= ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n+1}$ ....

(9)

$$a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

= ....

= ....

= ....

= ....

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

= ....

= ....

(10) $a_n = \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+10}$

$= \dfrac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+10})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+10})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+10}}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+10}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

4. ถ้า $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{3n^2+1}$ และ $b_n = \dfrac{2^n-5^n}{5^n+3^n}$ จงหาลิมิตของลำดับที่มีพจน์ที่ n เป็น $a_n-b_n+a_nb_n$

วิธีทำ $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{3n^2+1}$ $\qquad$ $b_n = \dfrac{2^n-5^n}{5^n+3^n}$

$= \dfrac{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}$ $\qquad$ $= \dfrac{5^n\left(\frac{2^n}{5^n}-1\right)}{5^n\left(1+\frac{3^n}{5^n}\right)}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad = \dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n + a_nb_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty}(a_nb_n)$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5. จงหาลิมิตของลำดับ $3, \frac{15}{4}, \frac{35}{9}, \frac{63}{16}, \frac{99}{25}, \ldots$

วิธีทำ พิจารณาลำดับ $3, 15, 35, 63, 99, \ldots$

$1\cdot3, 3\cdot5, 5\cdot7, 7\cdot9, 9\cdot11, \ldots$

พจน์ที่ n ของลำดับนี้คือ ....

พิจารณาลำดับ $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots$

พจน์ที่ n ของลำดับนี้คือ ....

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับ $3, \frac{15}{4}, \frac{35}{9}, \frac{63}{16}, \frac{99}{25}, \ldots$

คือ $a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1.3 อนุกรม

จุดประสงค์

1. นักเรียนสามารถหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้
2. นักเรียนสามารถหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตได้
3. นักเรียนสามารถหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง
4. การให้เหตุผล
5. การคิดสร้างสรรค์

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ เป็นลำดับจำกัดที่มี k พจน์ แล้ว $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k$ **เป็นอนุกรมจำกัด (finite series)**

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ เป็นลำดับอนันต์ แล้ว $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k+\ldots$ **เป็นอนุกรมอนันต์ (infinite series)**

1.3.1 อนุกรมเลขคณิต

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

ให้ $S_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\ldots+[a_1+(n-1)d]$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1+(a_1+(n-1)d)]$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

แบบฝึกหัดที่ 1.3.1

1. ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งมีผลบวก 5 พจน์แรก และผลบวก 15 พจน์แรกเท่ากันคือ 75 จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับนี้

วิธีทำ จากสูตร $S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

ผลบวก 5 พจน์แรกคือ $S_5 = \frac{5}{2}[2a_1+4d] = 75$ .....(1)

ผลบวก 15 พจน์แรกคือ $S_{15} = \frac{15}{2}[2a_1+14d] = 75$ .....(2)

จาก (1); $2a_1+4d = 30$ .....(3)

จาก (2); $2a_1+14d = 10$ .....(4)

(3)−(4); ....

....

แทนค่า d ใน (3);..

....

....

....

....

....

2. ถ้า S = {200, 201, 202, …, 400} จงหาผลบวกทั้งหมดของจำนวนในเซต S ที่หารด้วย 8 ลงตัว แต่หารด้วย 12 ไม่ลงตัว

วิธีทำ ให้ $A \subset S$ และสมาชิกในเซต A หารด้วย 8 ลงตัว

A = {200, 208, 216, ..., ...} หาจำนวนสมาชิกในเซต A

จากสูตร $a_n = a_1+(n-1)d$

a_1 = ..., d = ..., a_n = ...

แทนค่าใน n; ....

....

....

....

จากสูตรผลบวก n พจน์แรก $S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$

แทนค่าในสูตร จะได้ S_{26} = ...

= ....

ให้ $B \subset A$ โดยที่ B เป็นเซตของจำนวนที่หารด้วย 12 ลงตัว

B = {...}

จากสูตร a_n = ...

a_1 = ..., d = ..., a_n = ...

แทนค่าใน n; ....

....

....

....

หาผลบวก n พจน์แรกจากสูตร S_n = ...

แทนค่าในสูตร จะได้ ....

....

ดังนั้น ผลบวกทั้งหมดของจำนวนในเซต S ที่หารด้วย 8 ลงตัว แต่หารด้วย 12 ไม่ลงตัว เท่ากับ

....

3. ในการปล่อยจรวดจากระดับน้ำทะเล วินาทีแรกจรวดขึ้นไปได้สูง 45 ไมล์ ในวินาทีต่อ ๆ ไปความสูงของจรวดจะลดลงวินาทีละ 5 ไมล์ นานเท่าไรที่จรวดจะอยู่เหนือระดับน้ำทะเล 210 ไมล์

วิธีทำ วินาทีแรกจรวดเคลื่อนที่ได้ทาง .... ไมล์

วินาทีที่สองจรวดเคลื่อนที่ได้ทาง .... ไมล์

วินาทีที่สามจรวดเคลื่อนที่ได้ทาง .... ไมล์

อนุกรมคือ ....

จะต้องหาว่าจรวดอยู่เหนือระดับน้ำทะเล 210 ไมล์ เมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าไร

จากสูตร $S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

a_1 = ..., d = ..., S_n = ...

แทนค่าในสูตร จะได้ ....

....

....

....

....

....

....

....

ดังนั้น จรวดอยู่เหนือระดับน้ำทะเล 210 ไมล์ เมื่อเวลาผ่านไป

....

4. จงหาผลบวก n พจน์แรก และผลบวก 5 พจน์แรกของอนุกรม $54+36+18+\ldots$

วิธีทำ อนุกรม $54+36+18+\ldots$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

$a_1 =$ ...., $d =$ ....

จากสูตร ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

แทนค่า จะได้ $S_n =$ ....

....

....

....

ดังนั้น $S_5 =$ ....

....

1.3.2 อนุกรมเรขาคณิต

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

ให้ $S_n = a_1+a_1r+a_1r^2+\ldots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}$

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}, r \neq 1$$ เหมาะสำหรับ $|r| > 1$

หรือ $$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$$ เหมาะสำหรับ $|r| < 1$

แบบฝึกหัดที่ 1.3.2

1. จงหาผลบวก n พจน์แรก และผลบวก 5 พจน์แรกของอนุกรมต่อไปนี้

(1) $54+36+24+\ldots$

วิธีทำ อนุกรม $54+36+24+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

$a_1 =$ ...., $r =$ ....

จากสูตร ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

แทนค่า จะได้ $$S_n = \frac{54\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}}$$

....

$S_5 =$ ....

....

....

....

(2) $3+2\frac{1}{2}+2\frac{1}{12}+...$

วิธีทำ อนุกรม $3+2\frac{1}{2}+2\frac{1}{12}+...$ หรือ $3+\frac{5}{2}+\frac{25}{12}+...$ เป็นอนุกรม ....

a_1 = ..., r = ...

จากสูตร ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

S_n = ...

แทนค่า จะได้ S_n = ...

....

S_5 = ...

....

....

(3) $1+11+111+1,111+...$

วิธีทำ ให้

$$S = 1+11+111+1,111+...$$

$$9S = 9+99+999+9,999+...$$

$$9S = (10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+(10^4-1)+...$$

$$9S_n = (10+10^2+10^3+...+10^n)-n$$

$$= \frac{10(10^n-1)}{10-1}-n$$

= ....

S_n = ...

....

....

....

2. จงหาผลบวก 6 พจน์แรกของอนุกรม $\frac{1}{3}-1+3-9+...$

วิธีทำ อนุกรม $\frac{1}{3}-1+3-9+...$

a_1 = ..., r = ...

สูตรผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

ผลบวก 6 พจน์แรกของอนุกรม S_6 = ...

= ....

= ....

= ....

3. ในการเช่าซื้ออาคารสงเคราะห์ ปีแรกเสียค่าเช่าเดือนละ 5,000 บาท ปีที่สองเสียค่าเช่าลดลง 10% ของค่าเช่าปีแรก ปีที่สามเสียค่าเช่าลดลงอีก 10% ของค่าเช่าปีที่สอง จงหา

(1) ค่าเช่าอาคารสงเคราะห์ในปีที่ 10 เดือนละเท่าไร

(2) ค่าเช่าทั้งหมดในเวลา 10 ปี

วิธีทำ ปีแรกเสียค่าเช่าเดือนละ 5,000 บาท เป็นเวลา 12 เดือน

ปีต่อ ๆ ไปเสียค่าเช่าลดลง 10% ของค่าเช่าปีที่ผ่านมา

ปีที่สองเสียค่าเช่าเดือนละ $5{,}000\times\frac{90}{100} = 5{,}000(0.9)$ เป็นเวลา 12 เดือน

ปีที่สามเสียค่าเช่าเดือนละ $5{,}000(0.9)\times\frac{90}{100} = 5{,}000(0.9)^2$ เป็นเวลา 12 เดือน

(1) หาค่าเช่ารายเดือนในปีที่ 10 จากสูตร ....

ดังนั้น ในปีที่ 10 เสียค่าเช่าเดือนละ

....

....

....

(2) ค่าเช่าทั้งหมดในเวลา 10 ปี

ปีแรกเสียค่าเช่า	$12\times5{,}000$	บาท
ปีที่สองเสียค่าเช่า	$12\times5{,}000(0.9)$	บาท
ปีที่สามเสียค่าเช่า	$12\times5{,}000(0.9)^2$	บาท

เวลา 10 ปี เสียค่าเช่าทั้งหมด

$12\times5{,}000+12\times5{,}000(0.9)+12\times5{,}000(0.9)^2+...$ ถึง 10 พจน์

$= 12 \times 5{,}000[1+0.9+(0.9)^2+...]$ บาท

$=$ ....

$\approx$ ....

$=$ ....

4. ในการกำจัดศัตรูพืชครั้งหนึ่ง เมื่อฉีดยาทำลายหนึ่งครั้งจะกำจัดศัตรูพืชได้เพียง 75% ของปริมาณศัตรูพืชที่มีอยู่ขณะนั้นเสมอ จงหาว่าจะกำจัดศัตรูพืชได้กี่เปอร์เซ็นต์ของปริมาณที่มีอยู่ก่อนการกำจัดเมื่อ

(1) ฉีดยาทำลาย n ครั้ง (2) ฉีดยาทำลาย 5 ครั้ง

วิธีทำ ให้ก่อนกำจัดมีศัตรูพืชอยู่ 100 หน่วย

กำจัดครั้งที่ 1 กำจัดได้ 75% ของ 100 เท่ากับ 75 เหลือปริมาณศัตรูพืช 25 หน่วย

กำจัดครั้งที่ 2 กำจัดได้ 75% ของ 25 เท่ากับ $\frac{75}{4}$ เหลือปริมาณศัตรูพืช $25-\frac{75}{4}=\frac{25}{4}$ หน่วย

กำจัดครั้งที่ 3 กำจัดได้ 75% ของ $\frac{25}{4}$ เท่ากับ $\frac{75}{16}$ เหลือปริมาณศัตรูพืช $\frac{25}{4}-\frac{75}{16}=\frac{25}{16}$ หน่วย

อนุกรมของปริมาณศัตรูพืชที่ถูกกำจัดคือ $75+\frac{75}{4}+\frac{75}{16}+...$ เป็นอนุกรม ....

(1) ฉีดยาทำลาย n ครั้ง หาปริมาณศัตรูพืชที่ถูกกำจัดได้จากสูตร $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$a_1 =$ ...., $r =$ ....

$S_n =$ ....

....

....

ดังนั้น ฉีดยาทำลาย n ครั้ง กำจัดศัตรูพืชได้ ....% ของปริมาณที่มีอยู่ก่อนการกำจัด

(2) ฉีดยาทำลาย 5 ครั้ง

ดังนั้น กำจัดศัตรูพืชได้ ....

....

....

....

1.3.3 อนุกรมอนันต์

บทนิยาม

กำหนด $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ เป็นอนุกรมอนันต์

ให้

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1+a_2 \\
S_3 &= a_1+a_2+a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1+a_2+a_3+\dots+a_n
\end{aligned}
$$

เรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรม** เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก เรียกลำดับอนันต์ $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$ ว่า **ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม (a sequence of partial sums)**

ตัวอย่างที่ 1 จงหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $4+7+10+...+(3n+1)+...$

วิธีทำ ให้

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 4 \\
S_2 &= 4+7 = 11 \\
S_3 &= 4+7+10 = 21 \\
&\vdots \\
S_n &= 4+7+10+\dots+(3n+1) \\
&= \frac{n}{2}[2(4)+(n-1)(3)] \\
&= \frac{n}{2}[8+3n-3] \\
&= \frac{n}{2}(3n+5)
\end{aligned}
$$

ใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมคือ $4, 11, 21, ..., \frac{n}{2}(3n+5), ...$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2 จงหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...$

วิธีทำ ให้

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}$$

ใช้สูตร
$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$= 1-\frac{1}{2^n}$$

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมคือ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, ..., 1-\frac{1}{2^n}, ...$ **ตอบ**

บทนิยาม

กำหนดอนุกรมอนันต์ $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ ให้ $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ ถ้าลำดับ S_n เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ เมื่อ S เป็นจำนวนจริง แล้วอนุกรม $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ **เป็นอนุกรมลู่เข้า (convergent series)** เรียก S ว่าผลบวกของอนุกรม ถ้าลำดับ S_n เป็นลำดับลู่ออก แล้วอนุกรม $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ **เป็นอนุกรมลู่ออก (divergent series)**

จากตัวอย่างที่ 1 $4+7+10+\ldots+(3n+1)+...$

ลำดับ $4, 11, 21, ..., \frac{n}{2}(3n+5), ...$ เป็นลำดับลู่ออก

ดังนั้น $4+7+10+\ldots+(3n+1)+...$ เป็นอนุกรมลู่ออก

จากตัวอย่างที่ 2 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...$

ลำดับ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, ..., 1-\frac{1}{2^n}, ...$ เป็นลำดับลู่เข้า

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1$$

ดังนั้น $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

การแสดงว่าอนุกรมอนันต์เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออกทำได้ดังนี้

1. พิจารณาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม หาสูตรผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรม

2. พิจารณาลิมิตของลำดับ S_n ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ หาค่าได้ อนุกรมนั้นเป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้าลำดับ S_n ไม่มีลิมิต อนุกรมนั้นเป็นอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท

ให้อนุกรมเรขาคณิตอนันต์มีพจน์แรกเป็น a_1 และมี r เป็นอัตราส่วนร่วม
ถ้า $|r| < 1$ แล้วอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และมี $\frac{a_1}{1-r}$ เป็นผลบวกของอนุกรม
ถ้า $|r| \geq 1$ แล้วอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

ข้อสังเกต

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ที่ $-1 < r < 1$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
และอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ที่ $r \leq -1$ หรือ $r \geq 1$ เป็นอนุกรมลู่ออก

แบบฝึกหัดที่ 1.3.3

1. จงหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม และบอกว่าอนุกรมใดบ้างเป็นอนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเท่าไร

(1) $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\dots$

วิธีทำ ให้

$$S_n = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_1 = \frac{3}{2}$$

$$S_2 = \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = \dots\dots\dots\dots$$

$$S_3 = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \dots\dots\dots\dots$$

$\vdots$

$$S_n = \frac{\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

$$= \frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{9}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

$$= \text{...}$$

ลำดับของผลบวกย่อยคือ ....

เป็นอนุกรม .... และมีผลบวกเท่ากับ ....

ตรวจสอบโดยใช้ $S = \frac{a_1}{1-r}$

จาก $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+...+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+...$

$a_1 =$ ...., $r =$ ....

$S =$ ....

(2) $2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+...+2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+...$

วิธีทำ ให้

$$S_n = 2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+...+2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_1 = 2$$

$$S_2 = 2+\frac{4}{3} = \text{...}$$

$$S_3 = 2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9} = \text{...}$$

$\vdots$

$$S_n = \text{...}$$

$$= \text{...}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \text{...}$$

$$= \text{...}$$

ลำดับของผลบวกย่อยคือ ....

เป็นอนุกรม .... และมีผลบวกเท่ากับ ....

(3) $4+8+12+...+4n+...$

วิธีทำ ให้ $S_n = 4+8+12+...+4n$

$S_1 =$ ....

$S_2 =$ ....

$S_3 =$ ....

$\vdots$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$

$=$ ....

$=$ ....

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n =$ ....

$=$ ....

ลำดับของผลบวกย่อยคือ ....

เป็นอนุกรม ....

(4) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{9}{4}+...+\frac{1}{4}(3)^{n-1}+...$

วิธีทำ ให้ $S_n = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{9}{4}+...+\frac{1}{4}(3)^{n-1}$

$S_1 =$ ....

$S_2 =$ ....

$S_3 =$ ....

$\vdots$

$S_n = \frac{1}{4}[1+3+9+...+3^{n-1}]$

$=$ ....

$=$ ....

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n =$ ....

$=$ ....

ลำดับของผลบวกย่อยคือ ....

เป็นอนุกรม ....

(5) $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\ldots$

วิธีทำ ให้

$S_n = 1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$S_1 =$ ....

$S_2 =$ ....

$S_3 =$ ....

$\vdots$

$S_n =$ ....

....

....

....

ลำดับของผลบวกย่อยคือ ....

เป็นอนุกรม .... และมีผลบวกเท่ากับ ....

(6) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\ldots+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\ldots$

วิธีทำ ให้

$S_n = 1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\ldots+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$S_1 =$ ....

$S_2 =$ ....

$S_3 =$ ....

$\vdots$

$S_n =$ ....

....

....

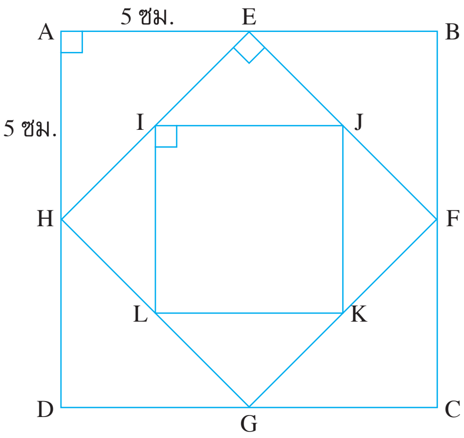
....

ลำดับของผลบวกย่อยคือ ....

เป็นอนุกรม .... และมีผลบวกเท่ากับ ....

2. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งมีด้านยาวด้านละ 10 เซนติเมตร สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่สอง ให้จุดยอดมุมอยู่ที่จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ของรูปที่หนึ่ง สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่สาม ให้จุดยอดมุมอยู่ที่จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ของรูปที่สอง ทำเช่นนี้เรื่อยไป จงหาความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมด

วิธีทำ



รูปที่หนึ่งมีเส้นรอบรูปยาว 4(10) เซนติเมตร

รูปที่สองมีเส้นรอบรูปยาว $4\sqrt{5^2+5^2}$ = ... เซนติเมตร

รูปที่สามมีเส้นรอบรูปยาว $4\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}$ = ... เซนติเมตร

ให้ S แทนผลบวกความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมด

S = 4(10) + ...

= 4(10 + ...)

= ....

$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

a_1 = ..., r = ...

= ....

= ....

= ....

ดังนั้น ความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมด เท่ากับ .... เซนติเมตร

3. จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรม $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\ldots$

วิธีทำ ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\ldots$

อนุกรม $1+3+5+7+\ldots$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

มีพจน์ที่ n คือ $a_n =$ ....

อนุกรม $2+4+8+16+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

มีพจน์ที่ n คือ $a_n =$ ....

ดังนั้น พจน์ที่ n ของอนุกรม $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\ldots$ คือ ....

นั่นคือ

$$S_n = \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\ldots+ \text{..........................}$$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{5}{16}+\ldots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$S_n-\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{8}+\frac{2}{16}+\ldots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}-1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{2}+2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$S_n =$ ....

$S_{10} =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

4. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมต่อไปนี้

(1) $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{7}{27}+\frac{10}{81}+...$

วิธีทำ พจน์ที่ n ของลำดับ 1, 4, 7, 10, ... คือ ....

พจน์ที่ n ของลำดับ 3, 9, 27, 81, ... คือ ....

พจน์ที่ n ของอนุกรม $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{7}{27}+\frac{10}{81}+...$ คือ ....

นั่นคือ $S_n = \frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{7}{27}+\frac{10}{81}+...+$ ....

$\frac{1}{3}S_n =$ ....

$S_n-\frac{1}{3}S_n =$ ....

$\frac{2}{3}S_n =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$S_n =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(2) $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+...+\frac{2n+1}{2^n}+...$

วิธีทำ ให้ $S_n = \frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+...+\frac{2n+1}{2^n}$

$\frac{1}{2}S_n = \frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+...+\frac{2n-1}{2^n}+\frac{2n+1}{2^{n+1}}$

$S_n-\frac{1}{2}S_n = \frac{3}{2}+$ ....

....

....

....

....

....

....

5. อนุกรมเรขาคณิตอนุกรมหนึ่งมีพจน์ที่สองเท่ากับ 6 และผลบวกอนันต์เท่ากับ 24 จงหาอนุกรมนี้

วิธีทำ พจน์ที่สองของอนุกรมเรขาคณิตคือ $a_1r = 6$

$$a_1 = \frac{6}{r} \qquad .....(1)$$

ผลบวกอนันต์ของอนุกรมเท่ากับ 24

$$\frac{a_1}{1-r} = 24 \qquad .....(2)$$

แทนค่า (1) ใน (2); ....

....

....

....

....

....

....

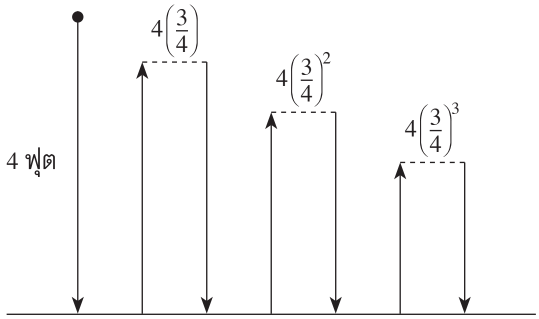
....

....

....

6. ลูกปิงปองตกจากโต๊ะสูง 4 ฟุต ถ้าทุกครั้งที่ลูกปิงปองกระทบพื้นจะกระดอนขึ้นเป็นระยะทาง $\frac{3}{4}$ ของความสูงที่ตกมา จงหาระยะทางทั้งหมดที่ลูกปิงปองเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง

วิธีทำ การเคลื่อนที่ของลูกปิงปองตามแนวดิ่ง



ระยะทางที่ลูกปิงปองเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง

$$= 4+2\left[4\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$= 4+8\left[\frac{3}{4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ฟุต}$$

7. การเคลื่อนที่ของชิงช้าเป็นแนวโค้ง ครั้งแรกแกว่งได้ระยะทาง 240 เซนติเมตร ครั้งต่อไปแกว่งได้ระยะทาง $\frac{9}{10}$ ของระยะทางครั้งก่อนเสมอ จงหาระยะทางที่ชิงช้าเคลื่อนที่ตั้งแต่เริ่มแกว่งจนหยุด

วิธีทำ ครั้งแรกชิงช้าเคลื่อนที่ได้ทาง 240 เซนติเมตร

ครั้งที่สองชิงช้าเคลื่อนที่ได้ทาง $240\left(\frac{9}{10}\right)$ เซนติเมตร

ครั้งที่สามชิงช้าเคลื่อนที่ได้ทาง $240\left(\frac{9}{10}\right)^2$ เซนติเมตร

ให้ $S = 240+240\left(\frac{9}{10}\right)+240\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots$

....

....

....

ดังนั้น ชิงช้าเคลื่อนที่ได้ทางทั้งหมด .... เซนติเมตร

8. จงหาผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{4}\log 2+\frac{1}{8}\log 4+\frac{1}{16}\log 8+\frac{1}{32}\log 16+...$

วิธีทำ ให้

$$S = \frac{1}{4}\log 2+\frac{1}{8}\log 4+\frac{1}{16}\log 8+\frac{1}{32}\log 16+...$$

$$S = \frac{1}{4}\log 2+\frac{2}{8}\log 2+\text{...}$$

$$S = \left(\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\text{...}\right)\log 2$$

$$\frac{1}{2}S = \left(\frac{1}{8}+\text{...}\right)\log 2$$

$$S-\frac{1}{2}S = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\text{...}\right)\log 2$$

$$\frac{1}{2}S = \text{...}$$

$$\frac{1}{2}S = \text{...}$$

$$S = \text{...}$$

ดังนั้น $\frac{1}{4}\log 2+\frac{1}{8}\log 4+\frac{1}{16}\log 8+\frac{1}{32}\log 16+... =$ ....

9. อนุกรมอนันต์อนุกรมหนึ่งมีพจน์ที่สองเท่ากับ 10 และผลบวกอนันต์เท่ากับ -9 จงหาอัตราส่วนร่วมของอนุกรมนี้

วิธีทำ $a_1+a_1r+a_1r^2+...$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ที่มี $-1<r<1$

พจน์ที่สองคือ $a_1r = 10$ .....(1)

ผลบวกอนันต์ของอนุกรมคือ $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

ดังนั้น $\frac{a_1}{1-r} =$ ....(2)

....

....

....

....

....

....

....

10. จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

(1) $0.\dot{4}\dot{5}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
0.\dot{4}\dot{5} &= 0.454545\ldots \\
&= \frac{45}{10^2}+\frac{45}{10^4}+\frac{45}{10^6}+\ldots \\
&= \frac{45}{10^2}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots\right) \\
&= \frac{45}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right) \\
&= \frac{45}{100}\left(\frac{1}{\frac{99}{100}}\right) \\
&= \frac{45}{100}\left(\frac{100}{99}\right) \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

(2) $0.4\dot{5}6\dot{7}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
0.4\dot{5}6\dot{7} &= 0.4+0.0567+0.0000567+\ldots \\
&= \frac{4}{10}+\frac{567}{10^4}+\frac{567}{10^7}+\ldots \\
&= \frac{4}{10}+\frac{567}{10^4}\left(1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\ldots\right) \\
&= \frac{4}{10}+\frac{567}{10000}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1000}}\right) \\
&= \frac{4}{10}+\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \frac{4}{10}+\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ตรวจสอบ

$0.4\dot{5}6\dot{7}$ ซ้ำ 3 ตำแหน่ง

$$= \frac{4567-4}{9990}$$

$$= \frac{4563}{9990}$$

$$= \frac{169}{370}$$

1.4 สัญลักษณ์แสดงการบวก

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถใช้สมบัติของสัญลักษณ์แสดงการบวกได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง
4. การให้เหตุผล
5. การคิดสร้างสรรค์

อักษรกรีก Σ เรียกว่า ซิกมา เป็นสัญลักษณ์แสดงการบวก

ซึ่ง $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$

สมบัติของ Σ

1. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i$
4. $\sum_{i=1}^{n} (a_i-b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{i=1}^{n} b_i$

การใช้ Σ หาผลบวก

$1+2+3+\ldots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$ [เขียนแทนด้วย Σn]

$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ [เขียนแทนด้วย Σn^2]

$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$ [เขียนแทนด้วย Σn^3]

เช่น 1. $\sum_{i=1}^{5} 4 = 5(4) = 20$

2. $\sum_{n=1}^{3} 4n = 4\sum_{n=1}^{3} n$

$= 4\left[\frac{3}{2}(3+1)\right] = 24$

3. $\sum_{n=1}^{4} (n^2+n-2) = \sum_{n=1}^{4} n^2 + \sum_{n=1}^{4} n - \sum_{n=1}^{4} 2$

$= \left[\frac{4}{6}(4+1)(2(4)+1)\right] + \left[\frac{4}{2}(4+1)\right] - 4(2) = 32$

แบบฝึกหัดที่ 1.4

1. จงเขียนในรูปการบวก

(1) $\sum_{i=1}^{5} (i+3) = (1+3)+(2+3)+$ ....

(2) $\sum_{k=1}^{4} (2k-5) = [2(1)-5]+[2(2)-5]+$ ....

(3) $\sum_{m=-2}^{4} (6-m^2) = [6-(-2)^2]+[6-(-1)^2]+$ ....

(4) $\sum_{i=0}^{3} 5(i+3) = 5(0+3)+$ ....

(5) $\sum_{i=1}^{5} 3(2)^{i-1} = 3(2)^{1-1}+$ ....

(6) $\sum_{i=1}^{4} 5\left(\frac{1}{3}\right)^{i} = 5\left(\frac{1}{3}\right)^{1}+$ ....

(7) $\sum_{k=1}^{4} (2k+k^2) = [2(1)+1^2]+$ ....

(8) $\sum_{k=0}^{4} \frac{k-1}{k+1} = \frac{0-1}{0+1}+$ ....

(9) $\sum_{n=1}^{4} \frac{2n-1}{n^2} = \frac{2(1)-1}{1^2}+$ ....

(10) $\sum_{i=1}^{3} i^2(i-1) = 1^2(1-1)+$ ....

(11) $\sum_{k=11}^{13} (k-6)(k+7) = (11-6)(11+7)+$ ....

(12) $\sum_{k=10}^{12} (k^2-4) =$ ....

2. จงเขียนอนุกรมต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์แทนการบวก

(1) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+...+n(n+1)$ = ...

(2) $1^2+3^2+5^2+7^2+...+(2n-1)^2+...$ = ...

(3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$ = ...

(4) $\frac{1}{5}+\frac{2}{25}+\frac{3}{125}+...+\frac{n}{5^n}+...$ = ...

(5) $\frac{\sqrt{2}-1}{1\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 2}+...+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}$ = ...

3. จงหาค่าของ

(1) $\sum_{k=1}^{4}(k^2-3)$ $= \sum_{k=1}^{4}k^2-\sum_{k=1}^{4}3$

= ....

= ....

(2) $\sum_{k=1}^{4}(k^2-6k+9)$ = ...

= ....

= ....

(3) $\sum_{k=0}^{49}(-50)$ = ...

(4) $\sum_{k=1}^{3}k(k+5)$ = ...

= ....

= ....

= ....

4. ถ้าพจน์ที่ n ของอนุกรมเลขคณิตอนุกรมหนึ่งคือ $5n-2$ จงหาผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมนี้

วิธีทำ *วิธีที่ 1* จากโจทย์ $a_n = 5n-2$

ผลบวก n พจน์แรกคือ
$$S_n = \sum(5n-2)$$
$$= 5\sum n-2n$$
$$= 5\left[\frac{n}{2}(n+1)\right]-2n$$

ผลบวก 20 พจน์แรกคือ S_{20} = ...

= ....

= ....

วิธีที่ 2 $a_n = 5n-2$

a_1 = ...

a_2 = ...

a_3 = ...

อนุกรมคือ ....

ผลบวก n พจน์แรกคือ $S_{20} = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

= ....

= ....

= ....

ดังนั้น ผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม $3+8+13+...$ เท่ากับ ....

5. จงหาผลบวก n พจน์แรก และผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรม $1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+...$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม $1+3+5+7+9+...$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

พจน์ที่ n คือ $a_n = a_1+(n-1)d$

จะได้ a_n = ...

= ....

ดังนั้น พจน์ที่ n ของอนุกรม $1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+...$ เท่ากับ ....

a_n = ...

a_n = ...

ผลบวก n พจน์แรกคือ S_n = ...

= ....

= ....

= ....

= ....

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้เท่ากับ ....

6. จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรม $2^3+5^3+8^3+11^3+...$

วิธีทำ พจน์ที่ n ของอนุกรม $2+5+8+11+...$ คือ

a_n = ...

= ....

พจน์ที่ n ของอนุกรม $2^3+5^3+8^3+11^3+...$ คือ

a_n = ...

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม $2^3+5^3+8^3+11^3+...$ คือ

S_n = ...

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้เท่ากับ ....

....

....

7. จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมต่อไปนี้

(1) $2+4+10+28+...$

วิธีทำ ให้ S แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม $2+4+10+28+...$

$S = 2+4+10+28+...$

$S = (1+1)+(1+3)+(1+9)+(1+27)+...$

$S = (1+3+9+27+...)+(1+1+1+1+...)$ .....(1)

อนุกรม $1+3+9+27+...$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต a_1 = ..., r = ...

จากสูตรผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

จะได้ S_n = ...

= ....

= ....

จาก (1) จะได้ S = ...

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรม $2+4+10+28+\ldots$ เท่ากับ

....

....

(2) $1+5+13+29+\ldots$

วิธีทำ ให้ S แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม $1+5+13+29+\ldots$

$S = 1+5+13+29+\ldots$

$S = (4-3)+(8-3)+(16-3)+(32-3)+\ldots$

$S = (4+8+16+32+\ldots)-(3+3+3+3+\ldots)$

= ....

= ....

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรม $1+5+13+29+\ldots$ เท่ากับ

....

....

8. จงหาพจน์ที่ n ผลบวก n พจน์แรก และผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรม $2\cdot3+5\cdot8+8\cdot13+11\cdot18+\ldots$

วิธีทำ จากอนุกรมที่กำหนด $2\cdot3+5\cdot8+8\cdot13+11\cdot18+\ldots$

พิจารณาลำดับ 2, 5, 8, 11, ... เป็นลำดับเลขคณิต

หาพจน์ที่ n จากสูตร $a_n = a_1+(n-1)d$

$a_n =$ ....

= ....

= ....

พิจารณาลำดับ 3, 8, 13, 18, ... เป็นลำดับ ....

หาพจน์ที่ n จากสูตร ....

....

....

....

จะได้ พจน์ที่ n ของอนุกรม $2\cdot3+5\cdot8+8\cdot13+11\cdot18+\ldots$ คือ

$a_n =$ ....

หาผลบวก n พจน์แรก S_n = ...

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเท่ากับ ....

....

....

....

9. จงหาผลบวก n พจน์แรก และผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม $1+3+6+10+15+...$

วิธีทำ จากอนุกรมที่กำหนด $1+3+6+10+15+...$

เขียนใหม่ได้ดังนี้ $1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+...$

ให้ $S_n = 1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+...+(1+2+3+4+...+n)$

พจน์ที่ n ของอนุกรมคือ a_n = ...

....

....

....

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมคือ S_n = ...

....

....

....

....

ดังนั้น ผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมเท่ากับ ....

....

....

10. จงหาผลบวกของอนุกรม $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)+\ldots+20\cdot21\cdot22$

วิธีทำ

$$\sum n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$\sum n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$\sum n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$$

$$\begin{aligned}
a_n &= n(n+1)(n+2) \\
&= n(n^2+3n+2) \\
&= n^3+3n^2+2n \\
S_n &= \sum(n^3+3n^2+2n) \\
&= \sum n^3+3\sum n^2+2\sum n \\
&= \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2+3\left[\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right]+2\left[\frac{n}{2}(n+1)\right] \\
S_{20} &= \left[\frac{20}{2}(21)\right]^2+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

11. กำหนดอนุกรม $1+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}\right)+\ldots$ จงหา

(1) พจน์ที่ n

วิธีทำ พจน์ที่ n ของอนุกรมคือ $a_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

(2) ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

วิธีทำ จาก $a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$

ผลบวก n พจน์แรกคือ $S_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

....

....

....

(3) ผลบวก 5 พจน์แรกของอนุกรม

วิธีทำ S_5 = ...

....

....

....

....

12. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{30}[a_1+(n-1)d] = -5{,}865$ และ $\sum_{n=1}^{20}[a_1+(n-1)d] = -2{,}610$ จงหา $\sum_{n=1}^{50}[a_1+(n-1)d]$

วิธีทำ

ใช้สูตร

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

$\sum_{n=1}^{30}[a_1+(n-1)d] = -5{,}865$

$\frac{30}{2}[2a_1+29d] = -5{,}865$

$2a_1+29d$ = ...(1)

$\sum_{n=1}^{20}[a_1+(n-1)d] = -2{,}610$

$\frac{20}{2}[2a_1+19d] = -2{,}610$

$2a_1+19d$ = ...(2)

(1)$-$(2); ....

d = ...

แทนค่า d ใน (2); $2a_1+$ ....

$2a_1$ = ...

a_1 = ...

$$\sum_{n=1}^{50}[a_1+(n-1)d] \quad = \quad S_{50}$$

....

....

....

....

....

13. จงหาค่าของ

(1) $\sum_{n=1}^{7}(n^2-4n+1)$

วิธีทำ

$$\sum_{n=1}^{7}(n^2-4n+1) = \sum_{n=1}^{7}n^2-4\sum_{n=1}^{7}n+\sum_{n=1}^{7}1$$

$$= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)-4\left[\frac{n}{2}(n+1)\right]+n$$

= ....

= ....

= ....

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n+\cos n\pi}{3(-1)^{n+2}}\right]^n$

วิธีทำ $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n+\cos n\pi}{3(-1)^{n+2}}\right]^n$

$$= \left[\frac{(-1)^1+\cos \pi}{3(-1)^{1+2}}\right]^1+\left[\frac{(-1)^2+\cos 2\pi}{3(-1)^{2+2}}\right]^2+\left[\frac{(-1)^3+\cos 3\pi}{3(-1)^{3+2}}\right]^3+\dots$$

$$= \left[\frac{(-1)+(-1)}{3(-1)}\right]^1+\left[\frac{1+1}{3(1)}\right]^2+\left[\frac{(-1)+(-1)}{3(-1)}\right]^3+\dots$$

$= \frac{2}{3}+$ ....

= ....

= ....

ใช้สูตร

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)+(-1)^{n+1}}{5(-1)^{n+3}}\right]^n$

วิธีทำ $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)+(-1)^{n+1}}{5(-1)^{n+3}}\right]^n$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^{n+1}+\text{.................}}{\text{.................................}}\right]^n$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\text{.................................}\right]^n$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\text{.................................}\right]^n$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$$\left.\begin{aligned}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right) &= 1\\ \sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right) &= -1\\ \sin\left(3\pi-\frac{\pi}{2}\right) &= 1\\ \sin\left(4\pi-\frac{\pi}{2}\right) &= -1\end{aligned}\right\}(-1)^{n+1}$$

อนุกรมเทเลสโคป (telescoping series) คือ อนุกรม $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ ที่สามารถเขียนในรูป $a_1+a_2+a_3+...+a_n+... = (b_1-b_2)+(b_2-b_3)+(b_3-b_4)+...+(b_n-b_{n+1})+...$ เมื่อ $a_1 = b_1-b_2$, $a_2 = b_2-b_3, ..., a_n = b_n-b_{n+1}$ ดังนั้น $a_1+a_2+...+a_n = b_n-b_{n+1}$

14. จงหาผลบวก n พจน์แรก และผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม แล้วพิจารณาว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าให้หาผลบวกของอนุกรม

(1) $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+...+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

$$S_{20} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2(20)+1}\right)$$

$$= \text{.....................................}$$

$$= \text{.....................................}$$

อนุกรมนี้เป็นอนุกรม ....

ผลบวกอนุกรมเท่ากับ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \text{.....................................}$

$= \text{.....................................}$

(2) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+4)} = \frac{1}{1\cdot 5}+\text{.....................................}$

วิธีทำ $S_n = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\text{.....................................}\right.$

$$= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)$$

$$S_{20} = \text{.....................................}$$

อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า ....

ผลบวกอนุกรมเท่ากับ ....

15. จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

วิธีทำ ให้ $a_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

$$a_1 = \frac{1}{(4-3)(4+1)} = \frac{1}{1\cdot 5}$$

$$a_2 = \frac{1}{(8-3)(8+1)} = \frac{1}{5\cdot 9}$$

$$a_3 = \frac{1}{(12-3)(12+1)} = \frac{1}{9\cdot 13}$$

ให้ $S_n = \frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \text{.....................................}$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \text{.....................................}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

วิธีทำ ให้ $a_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

และ $S_n = \frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-...+(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

$= \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+...-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$

= ....

$\lim_{n\to\infty} S_n$ = ...

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ = ...

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ = ...

ดังนั้น $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$ = ...

$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$ = ...

$\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}$ = ...

$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ = ...

S_n = ...

$\lim_{n\to\infty} S_n$ = ...

= ....

....

16. กำหนดให้ลำดับ a_n สอดคล้องสมการ $a_1+2a_2+3a_3+...+na_n = \frac{n+1}{n+2}$ ทุก $n \geqslant 1$ จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

วิธีทำ สำหรับ $n \geqslant 1,\ a_1+2a_2+3a_3+...+na_n$ $=$ ....(1)

สำหรับ $n \geqslant 2,\ a_1+2a_2+3a_3+...+(n-1)a_{n-1}$ $=$ ....(2)

$(1)-(2);\quad na_n = $ ....

$a_n = $ ....

$a_n = $ ....

$a_n = $ ....

จาก (1); $a_1 = $ ....

$n \geqslant 2;$ $a_2 = $ ....

$a_3 = $ ....

$S_n = 3\quad 2\left(2\cdot3\quad 3\cdot4\right)$ ....

$= $ ....

$\lim_{n\to\infty} S_n = $ ....

17. กำหนดให้ลำดับ $a \in R^+-\{1\}$ และ $\log_a a^2+\log_{\sqrt{a}} a^2+\log_{\sqrt[3]{a}} a^2+...+\log_{\sqrt[n]{a}} a^2 = 2{,}970$

จงหาค่าของ $\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+2n}$

วิธีทำ จาก $\log_a a^2+\log_{\sqrt{a}} a^2+\log_{\sqrt[3]{a}} a^2+...+\log_{\sqrt[n]{a}} a^2 = 2{,}970$

$$2\log_a a+\frac{2}{\frac{1}{2}}\log_a a+\frac{2}{\frac{1}{3}}\log_a a+...+\frac{2}{\frac{1}{n}}\log_a a = 2{,}970$$

$2\cdot1+2\cdot2+$...................................... $=$ ....

.... $=$ ....

.... $=$ ....

.... $=$ ....

.... $=$ ....

$$\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+2n} = \text{.......................................}$$

$= \text{.......................................}$

$= \text{.......................................}$

$= \text{.......................................}$

18. กำหนดให้ $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta - \sin^2\theta + \sin^3\theta - \sin^4\theta + ... = \frac{1}{4}$ จงหาผลบวกของอนุกรม $\cos\theta + \cos^2\theta + \cos^3\theta + ...$

วิธีทำ จาก $\sin\theta - \sin^2\theta + \sin^3\theta - \sin^4\theta + ... = \frac{1}{4}$

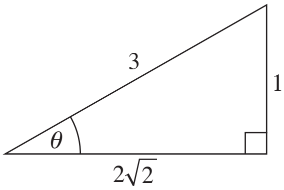
เป็นอนุกรมเรขาคณิต มี $r = \text{.......................................}$

ผลบวกของอนุกรมเท่ากับ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{4}$

$\text{...............................} = \text{.......................................}$

$\text{...............................} = \text{.......................................}$

$\text{...............................} = \text{.......................................}$



จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้

$\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

ดังนั้น $\cos\theta + \cos^2\theta + \cos^3\theta + ...$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

$= \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}$

$= \text{...............................}$

เนื่องจาก $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$
ดังนั้น $\cos\theta > 0$

$= \text{.......................................}$

$= \text{.......................................}$

$= \text{.......................................}$

19. กำหนดให้ $a_n = \frac{1}{n^k}\left[1+(2+2)+(3+3+3)+...+\underbrace{(n+n+...+n)}_{n \text{ พจน์}}\right]$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัว ที่ทำให้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L, L > 0$ แล้ว 6(L+k) มีค่าเท่าไร

วิธีทำ จาก

$$a_n = \frac{1}{n^k}\left[1+(2+2)+(3+3+3)+...+\underbrace{(n+n+...+n)}_{n \text{ พจน์}}\right]$$

$$= \frac{1}{n^k}[1+2(2)+3(3)+...+n(n)]$$

= ....

= ....

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ = ...

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}\left[\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right]$ = L เมื่อ k = 3

.... = ...

.... = ...

.... = ...

.... = ...

ดังนั้น 6(L+k) = ...

20. กำหนดให้ $a_n = \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{4^n}$ และ $b_n = \frac{1}{1+2+3+...+n}$ ถ้า A และ B เป็นผลบวกของอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ตามลำดับ แล้ว A+B มีค่าเท่าไร

วิธีทำ จาก

$$a_n = \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{4^n}$$

$a_n = \frac{2^{n+1}}{4^n}$ + ...

$a_n = 2\left(\frac{2^n}{4^n}\right)$ + ...

$a_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ + ...

$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad = \quad 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \text{..........}$

$= \quad 2\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3 \ldots\right]+ \text{..........}$

$= \quad \text{..........}$

$= \quad \text{..........}$

$= \quad \text{..........}$

$b_n \quad = \quad \frac{1}{1+2+3+\ldots+n}$

$b_n \quad = \quad \text{..........}$

$b_n \quad = \quad \text{..........}$

$b_n \quad = \quad \text{..........}$

$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad = \quad \text{..........}$

$= \quad \text{..........}$

$= \quad \text{..........}$

$= \quad \text{..........}$

จาก $A+B \quad = \quad \text{..........}$

$= \quad \text{..........}$

1.5 การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม

จุดประสงค์
นักเรียนสามารถประยุกต์ลำดับและอนุกรมไปใช้ในชีวิตประจำวันได้
ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์
1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การคิดสร้างสรรค์

ดอกเบี้ยทบต้น

ถ้าเงินต้น P บาท ได้รับดอกเบี้ย i% ต่อปี คิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี (ปีละ 1 ครั้ง) สิ้นปีที่ n จะได้เงินรวม $P[1+(0.01)i]^n$ บาท

ตัวอย่างที่ 1 ฝากเงิน 100,000 บาท กับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งโดยสถาบันการเงินให้อัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ 1 ครั้ง จงหาเงินรวมเมื่อฝากครบ 3 ปี

วิธีทำ ในที่นี้ $P = 100{,}000,\ n = 3$ และ $i = 5$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\text{เงินรวม} &= 100{,}000[1+(0.01)(5)]^3 \\ &= 100{,}000(1.05)^3 \text{ บาท} \\ &= 100{,}000(1.157625) \text{ บาท} \\ &= 115{,}762.50 \text{ บาท}\end{aligned}$$
ตอบ

ถ้าเงินต้น P บาท ได้รับดอกเบี้ย i% ต่อปี คิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง สิ้นปีที่ n จะได้เงินรวม $P\left[1+(0.01)\frac{i}{k}\right]^{kn}$ บาท

ตัวอย่างที่ 2 จากตัวอย่างที่ 1 ถ้าคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสามเดือน จงหาเงินรวมเมื่อฝากครบ 3 ปี

วิธีทำ ในที่นี้ $P = 100{,}000,\ k = 4,\ n = 3$ และ $i = 5$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\text{เงินรวม} &= 100{,}000\left[1+(0.01)\left(\frac{5}{4}\right)\right]^{12} \\ &= 100{,}000(1.0125)^{12} \text{ บาท} \\ &\approx 100{,}000(1.1607545) \text{ บาท} \\ &= 116{,}075.45 \text{ บาท}\end{aligned}$$
ตอบ

มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

ลงทุน P บาท ได้รับดอกเบี้ย i% ต่อปี คิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง เมื่อครบ n ปี มูลค่าอนาคตของเงินต้น P คือ $S = P\left[1+(0.01)\frac{i}{k}\right]^{kn}$ จะเรียก P ว่ามูลค่าปัจจุบันของเงินรวม S

$$P = S\left[1+(0.01)\frac{i}{k}\right]^{-kn}$$

ตัวอย่างที่ 3 พิชัยต้องการฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่ง ซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน ถ้าพิชัยต้องการให้มีเงินในบัญชีประมาณ 100,000 บาท เมื่อสิ้นปีที่ 5 เขาจะต้องฝากเงินไว้อย่างน้อยเท่าไร

วิธีทำ จาก $P = S\left[1+(0.01)\frac{i}{k}\right]^{-kn}$

ในที่นี้ $S = 100{,}000,\ k = 12,\ n = 5$ และ $i = 3$

จำนวนเงินอย่างน้อยที่ต้องฝาก คือ

$$\begin{aligned} P &= 100{,}000\left[1+(0.01)\left(\frac{3}{12}\right)\right]^{-60} \text{ บาท} \\ &= 100{,}000(1.0025)^{-60} \text{ บาท} \\ &\approx 100{,}000(0.8608691) \text{ บาท} \\ &= 86{,}086.91 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 4 ปรีชากู้เงินสุรีย์โดยกำหนดชำระหนี้ทั้งหมดใน 5 ปีข้างหน้า เป็นเงิน 66,911.28 บาท ถ้าสุรีย์คิดอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดอัตราดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหาจำนวนเงินที่ปรีชากู้จากสุรีย์

วิธีทำ ให้ P เป็นมูลค่าของหนี้ปัจจุบัน

ในที่นี้ $S = 66{,}911.28,\ k = 1,\ n = 5$ และ $i = 6$

จำนวนเงินที่ปรีชากู้จากสุรีย์ คือ

$$\begin{aligned} P &= 66{,}911.28\left[1+(0.01)\left(\frac{6}{1}\right)\right]^{-5} \text{ บาท} \\ &= 66{,}911.28(1.06)^{-5} \text{ บาท} \\ &\approx 66{,}911.28(0.7472582) \text{ บาท} \\ &\approx 50{,}000.00265 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ตอบ

ค่างวด

การรับหรือจ่ายค่างวด เช่น การรับเงินเดือนทุกเดือน การจ่ายค่าเช่าบ้านรายเดือน การจ่ายเบี้ยประกันรายปี การซื้อของแบบผ่อนชำระ มีลักษณะ 3 ประการ ดังนี้

1. รับหรือจ่ายเท่ากันทุกงวด
2. รับหรือจ่ายติดต่อกันทุกงวด
3. รับหรือจ่ายต้นงวดหรือสิ้นงวด

การหาเงินรวมของค่างวดทั้งหมด

การรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด งวดละ R บาท เริ่มรับหรือจ่ายต้นงวดรวม n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น i%

เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n เท่ากับ $\frac{R(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}$ เมื่อ $r = (0.01)i$

ตัวอย่างที่ 5 พจน์ฝากเงินเข้าบัญชีธนาคารทุกต้นเดือน เดือนละ 1,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดอัตราดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 พจน์จะได้เงินรวมเท่าไร

วิธีทำ พจน์ฝากเงินตอนต้นเดือนทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี

เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n เท่ากับ $\frac{R(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}$

ในที่นี้ $R = 1{,}000,\ n = 24,\ i = \frac{6}{12} = 0.5$ และ $r = (0.01)(0.5) = 0.005$

เมื่อสิ้นปีที่ 2 พจน์จะได้เงินรวม เท่ากับ $\frac{1000(1+0.005)[(1+0.005)^{24}-1]}{0.005}$ บาท

$$= \frac{1000(1.005)[(1.005)^{24}-1]}{0.005} \text{ บาท}$$

$$\approx 25{,}559.11 \text{ บาท}$$

ตอบ

การรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด งวดละ R บาท เริ่มรับหรือจ่ายสิ้นงวดรวม n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น i% เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n เท่ากับ $\frac{R[(1+r)^n-1]}{r}$ เมื่อ $r = (0.01)i$

ตัวอย่างที่ 6 ส้มฝากเงินเข้าบัญชีธนาคารทุกสิ้นเดือน เดือนละ 1,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดอัตราดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 ส้มจะได้เงินรวมเท่าไร

วิธีทำ ส้มฝากเงินตอนสิ้นเดือนทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี

ในที่นี้ $R = 1{,}000,\ n = 24,\ i = \frac{6}{12} = 0.5$ และ $r = (0.01)(0.5) = 0.005$

เมื่อสิ้นปีที่ 2 ส้มจะได้เงินรวม เท่ากับ $\frac{1000[(1+0.005)^{24}-1]}{0.005}$ บาท

$$= \frac{1000[(1.005)^{24}-1]}{0.005} \text{ บาท}$$

$$\approx 25{,}431.96 \text{ บาท}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 7 กอล์ฟซื้อเครื่องออกกำลังกายราคา 50,000 บาท โดยจ่ายเงินวันที่ซื้อเครื่องออกกำลังกาย 2,000 บาท และผ่อนชำระส่วนที่เหลือเป็นจำนวนเงินเท่ากันทุกเดือนเป็นเวลา 12 เดือน โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ยผ่อนชำระเป็น 15% ต่อปี โดยคิดอัตราดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน แล้วกอล์ฟจะต้องผ่อนชำระประมาณเดือนละเท่าไร

วิธีทำ ให้ R แทนจำนวนงวดที่กอล์ฟต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน

ในที่นี้ $i = \frac{15}{12} = 1.25$ และ $r = (0.01)(1.25) = 0.0125$

เหลือเงินที่ต้องผ่อนชำระ $50{,}000-2{,}000 = 48{,}000$ บาท

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1 คือ $R(1+0.0125)^{-1} = R(1.0125)^{-1}$

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 2 คือ $R(1+0.0125)^{-2} = R(1.0125)^{-2}$

$\vdots$

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 12 คือ $R(1+0.0125)^{-12} = R(1.0125)^{-12}$

ผลรวมมูลค่าปัจจุบันทั้ง 12 งวด คือ $R(1.0125)^{-1}+R(1.0125)^{-2}+\ldots+R(1.0125)^{-12}$

เป็นอนุกรมเรขาคณิตมีพจน์แรกคือ $R(1.0125)^{-1}$ และอัตราส่วนร่วมคือ $(1.0125)^{-1}$

ผลรวมมูลค่าปัจจุบันทั้ง 12 งวดคือ

$$\frac{R(1.0125)^{-1}[1-(1.0125)^{-12}]}{1-(1.0125)^{-1}} = 48{,}000$$

$$R = \frac{48000[1-(1.0125)^{-1}]}{(1.0125)^{-1}[1-(1.0125)^{-12}]} \text{ บาท}$$

$$\approx 4{,}332.40 \text{ บาท}$$

ตอบ

แบบฝึกหัดที่ 1.5

1. สมชัยฝากเงิน 500,000 บาท กับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งโดยสถาบันการเงินให้อัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหา
   (1) จำนวนเงินรวมเมื่อฝากครบ 3 ปี
   (2) จำนวนปีที่จะทำให้มีเงินเพิ่มขึ้นอย่างน้อย 2 เท่าของเงินต้น

วิธีทำ (1) จากเงินรวม $P[1+(0.01)i]^n$
ในที่นี้ P = ..., n = ... และ i = ...
ดังนั้น จำนวนเงินรวมเมื่อฝากครบ 3 ปี เท่ากับ ....
....
....
....

(2) ....
....
....
....
....
....
....
....

2. ฝากเงิน 1,000,000 บาท กับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งโดยสถาบันการเงินให้อัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน จงหาเงินรวมเมื่อฝากครบ 5 ปี

วิธีทำ ในที่นี้ P = ..., k = ..., n = ... และ i = ...
ดังนั้น เงินรวม เท่ากับ ....
....
....
....

3. ฝากเงินกับธนาคาร 400,000 บาท เมื่อฝากครบ 5 ปี มีเงินรวมทั้งสิ้น 460,000 บาท ถ้าธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปี

วิธีทำ จากเงินรวม $= P[1+(0.01)i]^n$

ในที่นี้เงินรวม = ..., $P =$ .... และ $n =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. สุธีต้องการฝากเงินกับสหกรณ์ออมทรัพย์แห่งหนึ่งซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน ถ้าสุธีต้องการให้มีเงินในบัญชีประมาณ 500,000 บาทเมื่อสิ้นปีที่ 3 เขาจะต้องฝากเงินไว้อย่างน้อยเท่าไร

วิธีทำ จาก $P = S\left[1+(0.01)\frac{i}{k}\right]^{-kn}$

ในที่นี้ $S =$ ...., $k =$ ...., $n =$ .... และ $i =$ ....

....

....

....

....

....

....

5. ปรีดากู้เงินปราณีเป็นเงิน 1,000,000 บาท โดยกำหนดชำระหนี้ทั้งหมดใน 5 ปีข้างหน้า โดยคิดอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี แบบทบต้นทุกเดือน เมื่อครบ 5 ปี ปรีดาต้องจ่ายเงินคืนปราณีเป็นเงินรวมทั้งหมดเท่าไร

วิธีทำ จาก $S = P\left[1+(0.01)\frac{i}{k}\right]^{kn}$

ในที่นี้ P = ..., k = ..., n = ... และ i = ...

....

....

....

....

....

6. อนันต์ฝากเงินเข้าบัญชีธนาคารทุกต้นเดือน เดือนละ 5,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดอัตราดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 5 อนันต์จะได้เงินรวมเท่าไร

วิธีทำ ....

....

....

....

....

....

....

สรุป

ลำดับ

- **ลำดับ** คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots\}$
- **ลำดับเลขคณิต** คือ ลำดับซึ่งมีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n+1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน และค่าคงตัวนี้เรียกว่า "ผลต่างร่วม" เขียนแทนผลต่างร่วมนี้ด้วย d พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1+(n-1)d$
- **ลำดับเรขาคณิต** คือ ลำดับซึ่งมีผลหารที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n+1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน และค่าคงตัวนี้ เรียกว่า "อัตราส่วนร่วม" เขียนแทนอัตราส่วนร่วมนี้ด้วย r พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1r^{n-1}$
- **ลำดับฮาร์มอนิก** คือ ลำดับซึ่งแต่ละพจน์เป็นส่วนกลับของลำดับเลขคณิต
- **ลิมิตของลำดับอนันต์** คือ ค่าที่ลำดับ a_n มีค่าเข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด
  - เรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า **ลำดับลู่เข้า**
  - เรียกลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิตและไม่เป็นลำดับลู่เข้าว่า **ลำดับลู่ออก**

ลำดับและอนุกรม

อนุกรม

- **อนุกรม** คือ ผลบวกของลำดับทั้งหมด
  - ผลบวก n พจน์แรกของลำดับเลขคณิต เรียกว่า **อนุกรมเลขคณิต** โดยผลบวก (S_n) หาได้จากสูตร
    $S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$ หรือ $S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$
  - ผลบวก n พจน์แรกของลำดับเลขคณิต เรียกว่า **อนุกรมเรขาคณิต** โดยผลบวก (S_n) หาได้จากสูตร
    $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ หรือ $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$
  - ผลบวก n พจน์แรกของลำดับอนันต์ เรียกว่า **อนุกรมอนันต์** โดยอนุกรมอนันต์ที่เป็นอนุกรมเรขาคณิต เป็นอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $-1 < r < 1$ โดยผลบวก (S_∞) หาได้จากสูตร $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$
- **สัญลักษณ์แทนการบวก**
  $\sum$ เป็นสัญลักษณ์แทนการบวก โดยสูตรสำคัญมีดังนี้
  (1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$
  (2) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$
  (3) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$

การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม

- **ดอกเบี้ยทบต้น**
  - ถ้าเงินต้น P บาท ได้รับดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี คิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี (ปีละ 1 ครั้ง) สิ้นปีที่ n จะได้เงินรวม $P[1+(0.01)i]^n$ บาท
  - ถ้าเงินต้น P บาท ได้รับดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี คิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง สิ้นปีที่ n จะได้เงินรวม $P\left[1+(0.01)\frac{i}{k}\right]^{kn}$ บาท
- **มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต**
  ลงทุน P บาท ได้รับดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี คิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง เมื่อครบ n ปี มูลค่าอนาคตของเงินต้น P คือ $S = P\left[1+(0.01)\frac{i}{k}\right]^{kn}$
  จะเรียก P ว่ามูลค่าปัจจุบันของเงินรวม S
  $P = S\left[1+(0.01)\frac{i}{k}\right]^{-kn}$
- **การหาเงินรวมของค่างวดทั้งหมด**
  - การรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด งวดละ R บาท เริ่มรับหรือจ่ายต้นงวดรวม n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n เท่ากับ
    $\frac{R(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}$ เมื่อ $r = (0.01)i$
  - การรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด งวดละ R บาท เริ่มรับหรือจ่ายสิ้นงวดรวม n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\ \%$ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n เท่ากับ
    $\frac{R[(1+r)^n-1]}{r}$ เมื่อ $r = (0.01)i$

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1+\sqrt{n+1}}}$ เป็นลำดับลู่ออก

ข. $a_n = \dfrac{1-r^n}{1-r}$ เป็นลำดับลู่ออก เมื่อ $r > 1$

ค. $-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{100}-\dfrac{1}{1000}+\ldots+\left(-\dfrac{1}{10}\right)^n+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า มีผลบวกเท่ากับ $-\dfrac{1}{11}$

ข้อใดสรุปถูกต้อง

1. ข้อ ก และข้อ ข เป็นจริง
2. ข้อ ก และข้อ ค เป็นจริง
3. ข้อ ข และข้อ ค เป็นจริง
4. ข้อ ก ข้อ ข และข้อ ค เป็นจริง

2. $\sum\limits_{n=1}^{7}(n-2)^2$ มากกว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n+\cos n\pi}{3(-1)^{n+2}}\right]^n$ อยู่เท่าไร

1. 33   2. 54
3. 56   4. 58

3. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับลู่ออก

1. $a_n = \sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right)+\cos^2\left(\dfrac{1}{n}\right)$
2. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$
3. $a_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$
4. $a_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

4. ข้อใดเป็นจริง

1. ถ้า $a_1+a_2+a_3+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต และ $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ หาค่าได้เสมอ
2. ถ้า a_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับซึ่งมี $a_{n+1} > a_n$ สำหรับทุก ๆ n แล้วลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก
3. ให้ a_n เป็นลำดับซึ่งกำหนดโดย $a_n = 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ และ $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว a_n เป็นลำดับลู่เข้า
4. ผลบวกของอนุกรม $1+\dfrac{5}{3}+\dfrac{12}{3^2}+\dfrac{22}{3^3}+\dfrac{35}{3^4}+\ldots$ เท่ากับ $\dfrac{45}{8}$

5. ข้อใดเป็นจริง

1. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า มีผลบวกเท่ากับ 2
2. ถ้า $a > 0$ แล้วอนุกรม $1+\dfrac{a}{1+a}+\left(\dfrac{a}{1+a}\right)^2+\left(\dfrac{a}{1+a}\right)^3+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า มีผลบวกเท่ากับ $1-a$
3. $\ln\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{2}{3}+\ln\dfrac{3}{4}+\ln\dfrac{4}{5}+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่ออก
4. ถ้า a_n เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ สำหรับทุกค่าของ n

6. ผลบวก 18 พจน์แรกของอนุกรม $1+9+25+49+81+\ldots$ เท่ากับข้อใด

1. 7,734   2. 7,751
3. 7,753   4. 7,770

7. ผลบวกของอนุกรม $\log_3 3+\log_{\sqrt{3}} 3+\log_{\sqrt[3]{3}} 3+\ldots+\log_{\sqrt[n]{3}} 3$ เท่ากับข้อใด

1. $\dfrac{1}{2}(n+1)\log 3$ 2. $\dfrac{n}{2}(n+1)\log 3$
3. $\dfrac{1}{2}(n+1)$ 4. $\dfrac{n}{2}(n+1)$

8. กำหนดให้ c เป็นค่าคงตัว

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5cn^3+3n^2+5c}{(n+1)^3} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots$ แล้ว c เท่ากับข้อใด

1. $\dfrac{2}{5}$ 2. $\dfrac{1}{5}$
3. $\dfrac{1}{10}$ 4. $\dfrac{1}{20}$

9. กำหนดอนุกรม

A: $\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+...+\frac{5}{n(n+1)}+...$

B: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$

C: $15+9+\frac{27}{5}+...+15\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+...$

ข้อใดสรุปเกี่ยวกับอนุกรมข้างต้นได้ถูกต้อง

1. อนุกรมทั้งสามเป็นอนุกรมลู่เข้าทั้งหมด
2. อนุกรม A และอนุกรม B เท่านั้นเป็นอนุกรมลู่เข้า
3. อนุกรม A และอนุกรม C เท่านั้นเป็นอนุกรมลู่เข้า
4. ลิมิตของลำดับของพจน์ของอนุกรม B มีค่าเท่ากับศูนย์ จึงทำให้อนุกรม B เป็นอนุกรมลู่เข้า

10. ลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3+n^{\frac{1}{3}}\right)}{5+n^{\frac{2}{3}}-n^4}$ เท่ากับข้อใด

1. 0 2. $\frac{1}{5}$

3. $\frac{3}{5}$ 4. หาค่าไม่ได้

11. ถ้า $\log_a(ax)+2\log_a(a^2x)+3\log_a(a^3x)+...+10\log_a(a^{10}x) = 110$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $\frac{1}{a^{10}}$ 2. $\frac{1}{a^5}$

3. $\frac{1}{a^{\frac{5}{2}}}$ 4. $\frac{1}{a^{\frac{5}{4}}}$

12. ข้อใดเป็นเซตคำตอบของอสมการ

$\log_3 x-\log_{3^2} x+\log_{3^4} x-\log_{3^8} x+... < 1$

1. $(0,\sqrt{3})$ 2. $(\sqrt{3},\infty)$

3. $(0,3\sqrt{3})$ 4. $(3\sqrt{3},\infty)$

13. ลิมิตของลำดับ $a_n = \sqrt[3]{\dfrac{8n-3}{2-n}}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. -2 2. 0

3. 2 4. 8

14. ผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5}{2^n}-\frac{3}{n(n+1)}\right]$ เท่ากับข้อใด

1. 0 2. 2

3. 4 4. 5

15. ถ้า $\sum_{n=3}^{15}\frac{2}{(n-2)(n+1)} = \frac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง ห.ร.ม. ของ a และ b เป็น 1 แล้ว a+b เท่ากับข้อใด

1. 8 2. 11

3. 13 4. 16

16. กำหนดให้ $a_n = \frac{4n-5}{8n+1}$ และ $b_n = \frac{2-3n^2}{1-6n^2}$ เมื่อข้อใดเป็น**เท็จ**

1. $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}|b_n|$
2. $\lim_{n\to\infty}|a_n+b_n| = 2$
3. $\lim_{n\to\infty}|a_nb_n| = \frac{1}{4}$
4. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 1$

17. ผลบวกของอนุกรม

$1\cdot 40+3\cdot 38+5\cdot 36+...+39\cdot 2$ เท่ากับข้อใด

1. 5,740 2. 6,480

3. 17,220 4. 18,060

18. กำหนดพจน์ที่ n ของลำดับสองลำดับดังนี้

$$a_n = \frac{n(1+2+3+...+n)}{3(1^2+2^2+3^2+...+n^2)}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$$

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$
2. $1+\sqrt{3}$
3. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. $\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

19. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งทำให้

$1+\log_{\sqrt{2}} 2+\log_{\sqrt[3]{2}} 2+...+\log_{\sqrt[n]{2}} 2 = n^2-21$

แล้ว $1+2+2^2+...+2^n$ มีค่าเท่ากับข้อใด

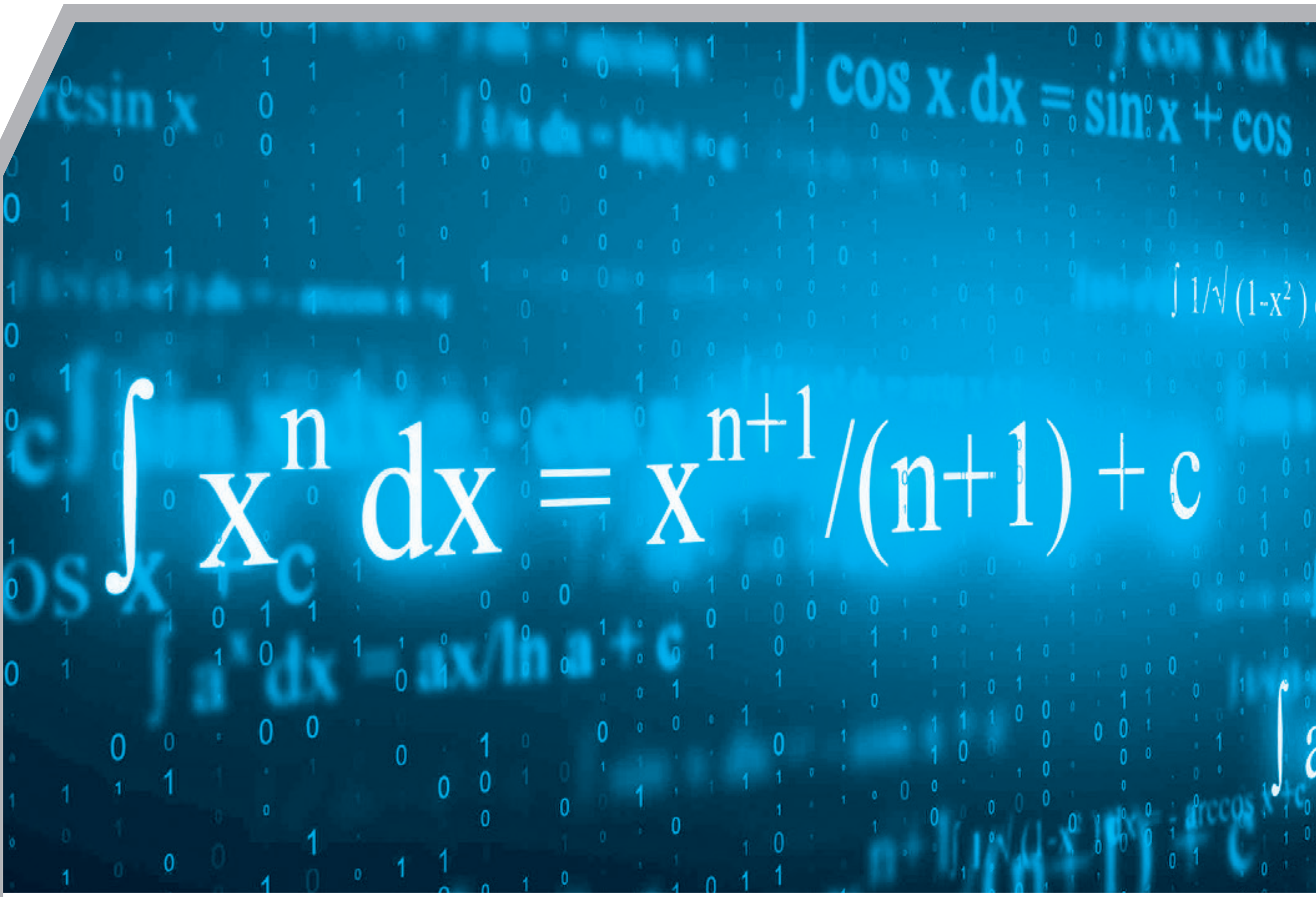
1. 63
2. 127
3. 255
4. 511

20. ผลบวกของอนุกรม $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+...+19\cdot20^2$ เท่ากับข้อใด

1. 40,130
2. 41,230
3. 42,130
4. 43,120

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2

แคลคูลัสเบื้องต้น



สาระและผลการเรียนรู้

สาระแคลคูลัส

เข้าใจลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และปริพันธ์ของฟังก์ชัน และนำไปใช้

ผลการเรียนรู้

1. ตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้
2. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา
3. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหา

เราสามารถประยุกต์ใช้แคลคูลัสได้อย่างมากมายผ่านการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อประมวลผลให้ได้คำตอบที่ดีที่สุดหรือถูกต้องที่สุดออกมา ทั้งนี้แคลคูลัสเป็นภาษาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนไหวและการเปลี่ยนแปลง ถ้าจำนวน ปริมาณ หรือระบบกำลังเปลี่ยนแปลง เราสามารถใช้แคลคูลัสช่วยในการวิเคราะห์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยเฉพาะในด้านวิศวกรรมและอากาศยาน นอกจากนี้ในด้านการแพทย์สามารถนำแคลคูลัสไปใช้ในการทำนายอัตราการเติบโตของเนื้องอกได้ หรือแม้กระทั่งในด้านสถาปัตยกรรม แคลคูลัสก็มีบทบาทสำคัญเช่นกัน เช่น ในการสร้างสะพาน เราจำเป็นจะต้องออกแบบโดยคำนึงถึงความสามารถในการรองรับน้ำหนักที่แตกต่างกัน ทั้งนี้แคลคูลัสจะถูกนำมาใช้ในการคำนวณเพื่อให้ได้สะพานที่แข็งแรงที่สุดโดยคำนึงถึงประโยชน์ใช้สอยและความปลอดภัย

2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

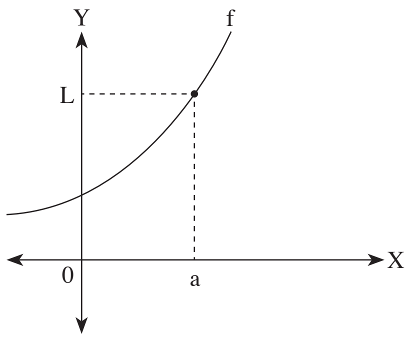
1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง
3. การให้เหตุผล
4. การคิดสร้างสรรค์

สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a เรียก L ว่า ลิมิตของ f ที่ a เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ถ้าไม่มีจำนวนจริง L ซึ่ง $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a แล้ว f ไม่มีลิมิตที่ a จะเขียนว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ในการหาลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a จะพิจารณาค่าของ $f(x)$ ว่าเข้าใกล้จำนวนจริงค่าใดขณะที่ x เข้าใกล้ a แต่ $x \neq a$ แสดงว่าไม่พิจารณาค่าของ $f(x)$ ที่ $x = a$ ดังนั้น ฟังก์ชัน f อาจจะนิยามหรือไม่นิยามที่ $x = a$ ก็ได้ แต่ฟังก์ชัน f จะต้องนิยามที่แต่ละจุดที่ใกล้ a

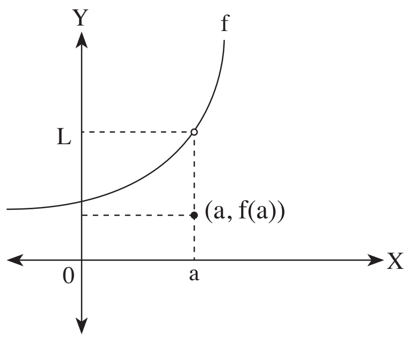
พิจารณากราฟของฟังก์ชัน

(1)



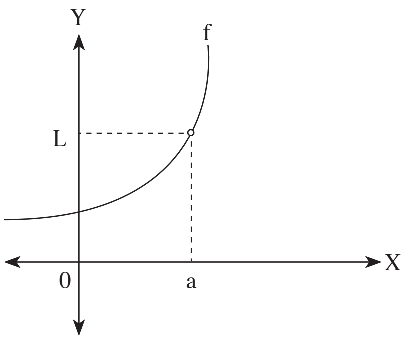
จากกราฟ $f(a) = L$

(2)



จากกราฟ $f(a) \neq L$

(3)



$f(x)$ ไม่นิยามที่ $x = a$

จากข้อ (1), (2) และ (3) จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง

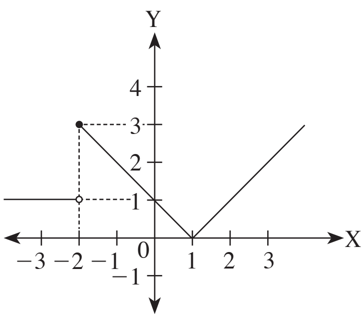
(1) ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_1 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย $(x < a)$ เรียก L_1 ว่า **ลิมิตซ้าย**ของ $f(x)$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$

(2) ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_2 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา $(x > a)$ เรียก L_2 ว่า **ลิมิตขวา**ของ $f(x)$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$

ถ้า $L_1 = L_2 = L$ จะได้ว่า ฟังก์ชัน f มีลิมิตเท่ากับ L เมื่อ x เข้าใกล้ a เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

ถ้า $L_1 \neq L_2$ จะได้ว่า ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ a นั่นคือ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$



$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$ (พิจารณากราฟที่ $x > 1$)

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$ (พิจารณากราฟที่ $x < 1$)

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ (เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$)

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 3$ (พิจารณากราฟที่ $x > -2$)

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 1$ (พิจารณากราฟที่ $x < -2$)

$\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3} & \text{เมื่อ } x \geqslant 4 \\ 9-2x & \text{เมื่อ } x < 4 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = \sqrt{x-3}$ เมื่อ $x \geqslant 4$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \sqrt{x-3}$

$= \sqrt{4-3} = 1$

และเนื่องจาก $f(x) = 9-2x$ เมื่อ $x < 4$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} (9-2x)$

$= 9-2(4) = 1$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 1$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 1$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{เมื่อ } x \geqslant 1 \\ 0.5 & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = 2x+1$ เมื่อ $x \geqslant 1$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x+1)$

$= 2(1)+1$

$= 3$

และเนื่องจาก $f(x) = 0.5$ เมื่อ $x < 1$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0.5$

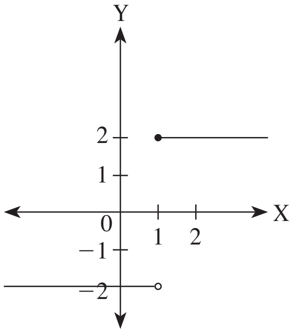
เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้ **ตอบ**

แบบฝึกหัดที่ 2.1 ก

1. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ จงหาลิมิตของฟังก์ชันในแต่ละข้อ

(1)

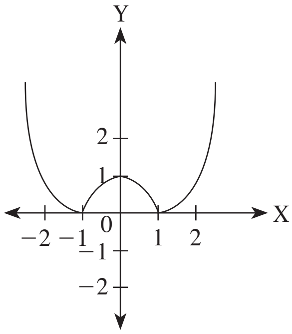


1) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ = ...

2) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ = ...

3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ = ...

(2)



1) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ = ...

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ = ...

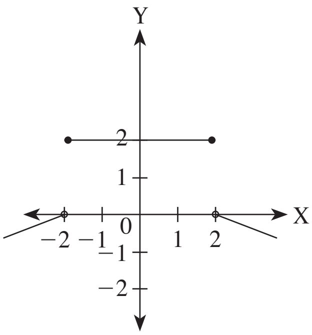
3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ = ...

4) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ = ...

5) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ = ...

6) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ = ...

(3)



1) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ = ...

2) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ = ...

3) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ = ...

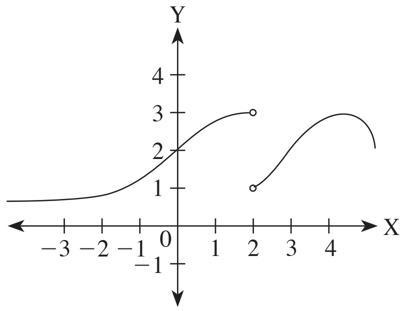
4) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ = ...

5) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ = ...

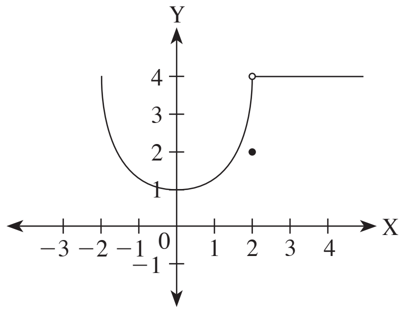
6) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ = ...

2. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$

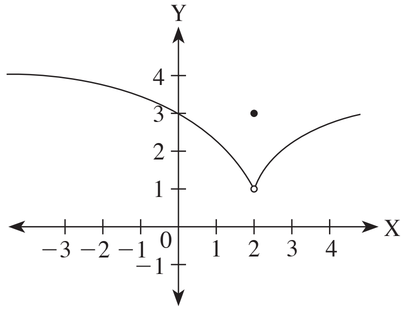
(1)



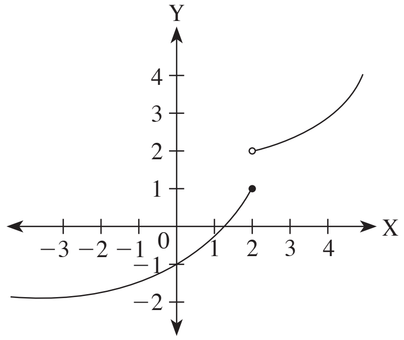
(2)



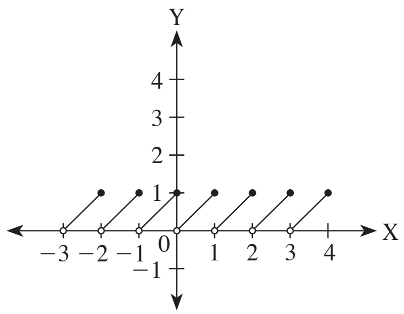
(3)



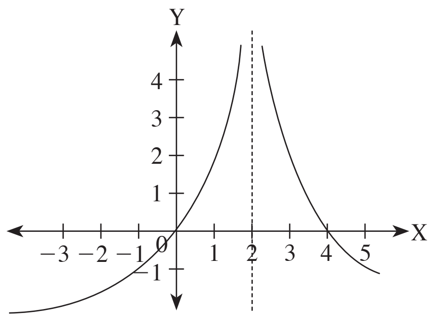
(4)



(5)



(6)

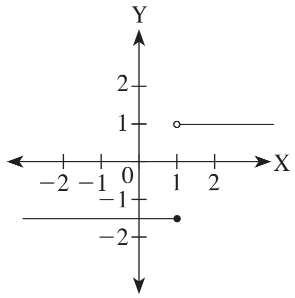


จงเติมช่องว่างให้สมบูรณ์

ลิมิตของฟังก์ชัน	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$						
2) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$						
3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$						
4) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$						
5) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$						
6) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$						

3. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ จงหาลิมิตของ $f(x)$ ในแต่ละข้อ

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 1 \\ -1.5 & , x \leq 1 \end{cases}$

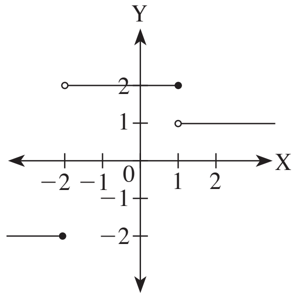


$\lim_{x \to 1^+} f(x)$ = ...

$\lim_{x \to 1^-} f(x)$ = ...

$\lim_{x \to 1} f(x)$ = ...

(2) $h(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 1 \\ 2 & , \quad -2 < x \leq 1 \\ -2, & \quad x \leq -2 \end{cases}$



$\lim_{x \to -2^+} h(x)$ = ...

$\lim_{x \to -2^-} h(x)$ = ...

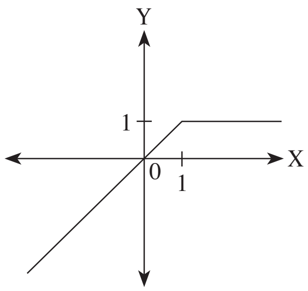
$\lim_{x \to -2} h(x)$ = ...

$\lim_{x \to 1^+} h(x)$ = ...

$\lim_{x \to 1^-} h(x)$ = ...

$\lim_{x \to 1} h(x)$ = ...

(3) $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$

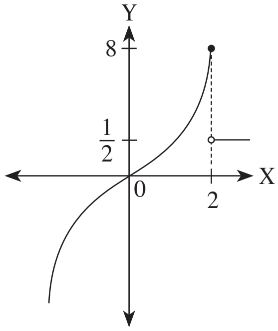


$\lim_{x \to 1^+} g(x)$ = ...

$\lim_{x \to 1^-} g(x)$ = ...

$\lim_{x \to 1} g(x)$ = ...

(4) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x > 2 \\ x^3, & x \leq 2 \end{cases}$

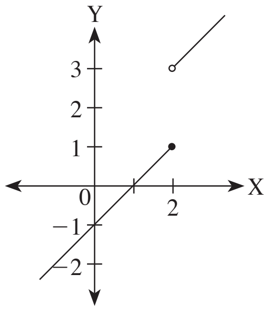


$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ = ...

(5) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 2 \\ x-1, & x \leq 2 \end{cases}$

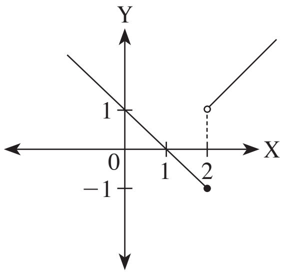


$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ = ...

(6) $h(x) = \begin{cases} x-1 & , x > 2 \\ -x+1, & x \leq 2 \end{cases}$

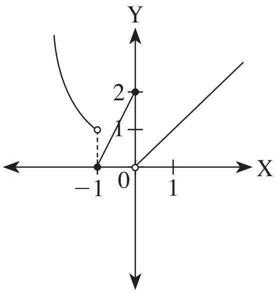


$\lim\limits_{x \to 2^+} h(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 2^-} h(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ = ...

(7) $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 2(x+1), & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & , \quad x < -1 \end{cases}$

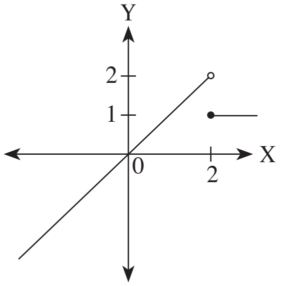


$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ = ...

(8) $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ x, & x < 2 \end{cases}$

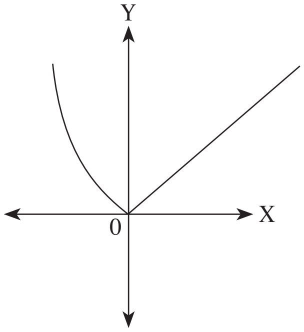


$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ = ...

(9) $h(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$

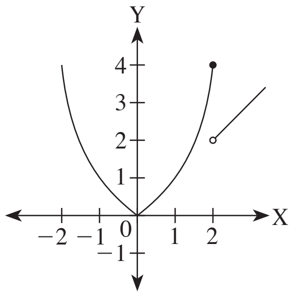


$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ = ...

(10) $f(x) = \begin{cases} x\ , & x > 2 \\ x^2, & x \leq 2 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ = ...

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

ทฤษฎีบท 1

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

เมื่อ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = M$ แล้วจะได้ว่า

(1) $\lim_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

(2) $\lim_{x\to a} x = a$

(3) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in I^+$

(4) $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

(5) $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x) = L+M$

(6) $\lim_{x\to a} [f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x) = L-M$

(7) $\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x) = L\cdot M$

(8) $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

(9) $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$ เมื่อ $n \in I^+$

(10) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in I^+ - \{1\}$

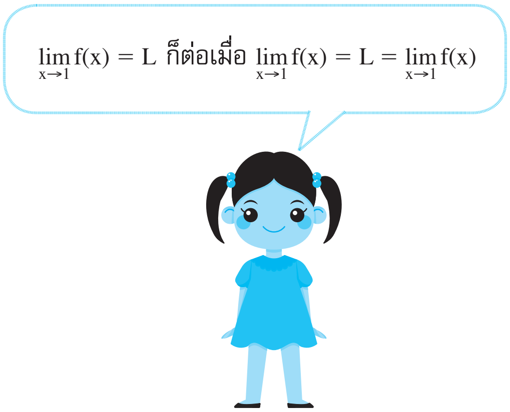
$\sqrt[n]{f(x)} \in R$ และ $\sqrt[n]{L} \in R$

ทฤษฎีบท 2

ถ้า p(x) เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้วสำหรับจำนวนจริง a ใดๆ $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$

ทฤษฎีบท 3

ถ้า f เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยที่ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p(x) และ q(x) เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้ว $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)}$ สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ ที่ $q(a) \neq 0$



ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\lim_{x \to -1} (x^4 - 2x + 5)$

วิธีทำ

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\lim_{x \to 4} \frac{4 - \sqrt{x}}{16 - x}$

วิธีทำ

ตอบ

ตัวอย่างที่ 6 จงหา $\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

วิธีทำ

ตอบ

ตัวอย่างที่ 7 จงหา $\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{\frac{x^2-10x+9}{x-1}}$

วิธีทำ

ตอบ

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{เมื่อ } x > 2 \\ x^2-4x+5 & \text{เมื่อ } x \leqslant 2 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x\to 2} f(x)$

วิธีทำ

ตอบ

แบบฝึกหัดที่ 2.1 ข

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

(1) $\lim_{x \to -3} (x^3 - 3x)$

$= \lim_{x \to -3} x^3 - 3\lim_{x \to -3} x$

$= (-3)^3 - 3(-3)$

$=$ ....

$=$ ....

(2) $\lim_{x \to 1} (4x^3 - 6x + 5)$

$= 4\lim_{x \to 1} x^3 - 6\lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 5$

$= 4(1)^3 - 6(1) + 5$

$=$ ....

$=$ ....

(3) $\lim_{x \to 1} (2x^3 - 2x^2 + 2x)$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(4) $\lim_{x \to -2} (4 - 3x^4 + 4x^3)$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(5) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2} (x - 1)$

$=$ ....

$=$ ....

(6) $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$

$= \lim_{x \to -4} \frac{(x-4)(x+4)}{x+4}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(7) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

$= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x+2}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(8) $\lim_{x \to 3} \frac{9 - x^2}{3 - x}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(9) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(10) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{2x^2-x-6}$

$= \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{(x-2)(2x+3)}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(11) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x\to1}(1+\sqrt{x})$

$=$ ....

$=$ ....

(12) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(13) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

$= \lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{(x-2)(x+2)}\right)$

$= \lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)-4}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(14) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-x-12}{x-4}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(15) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$

$= \lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(5x+3)}$

$= \lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x-1}{5x+3}$

$=$ ....

$=$ ....

(16) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-13x-10}{2x^2-7x-15}$

$= \lim\limits_{x\to5}\dfrac{(3x+2)(x-5)}{(2x+3)(x-5)}$

$= \lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x+2}{2x+3}$

$=$ ....

$=$ ....

(17) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{x^2-5x-4}$

$= \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 4}(x^2-5x-4)}$

= ....

= ....

= ....

(18) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{x^4-4x+1}$

$= \sqrt{\lim\limits_{x\to -2}(x^4-4x+1)}$

= ....

= ....

= ....

(19) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{\dfrac{2+5x-3x^3}{x^2-1}}$

$= \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2+5x-3x^3}{x^2-1}}$

= ....

= ....

= ....

= ....

(20) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{3x^2+4}\ \sqrt[3]{3x+2}$

$= \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+4)}\ \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)}$

$= \sqrt{3(2)^2+4}\ \sqrt[3]{3(2)+2}$

= ....

= ....

= ....

(21) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+3\sqrt{x}}{4-\dfrac{16}{x}}$

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to 8}(x^{\frac{2}{3}}+3\sqrt{x})}{\lim\limits_{x\to 8}\left(4-\dfrac{16}{x}\right)}$

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to 8}x^{\frac{2}{3}}+3\lim\limits_{x\to 8}\sqrt{x}}{\lim\limits_{x\to 8}4-\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{16}{x}}$

= ....

= ....

= ....

(22) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{2\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{x}+5}$

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to 16}\left(2\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}\right)}{\lim\limits_{x\to 16}(\sqrt[4]{x}+5)}$

$= \dfrac{2\lim\limits_{x\to 16}\sqrt{x}+\lim\limits_{x\to 16}x^{\frac{3}{2}}}{\lim\limits_{x\to 16}\sqrt[4]{x}+\lim\limits_{x\to 16}5}$

= ....

= ....

= ....

2. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

(1) $\lim_{x\to -1} \frac{2-\sqrt{x+5}}{x+1}$

$= \lim_{x\to -1} \frac{(2-\sqrt{x+5})(2+\sqrt{x+5})}{(x+1)(2+\sqrt{x+5})}$

$= \lim_{x\to -1} \frac{4-(x+5)}{(x+1)(2+\sqrt{x+5})}$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

(2) $\lim_{x\to 4} \frac{x-\sqrt{32-x^2}}{x-4}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-\sqrt{32-x^2})(x+\sqrt{32-x^2})}{(x-4)(x+\sqrt{32-x^2})}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{x^2-(32-x^2)}{(x-4)(x+\sqrt{32-x^2})}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{x^2-32+x^2}{(x-4)(x+\sqrt{32-x^2})}$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

(3) $\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

(4) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

3. จงหาค่าของลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนด ถ้าลิมิตมีค่า

(1) $$f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \leqslant 1 \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x\to1^-} (x)$ = ...

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ = ...

(2) $$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leqslant 1 \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ = ...

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ = ...

(3) $$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ = ...

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ = ...

$f(1)$ = ...

(4) $$f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ x^2+1, & x > 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ = ...

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ = ...

$f(1)$ = ...

(5) $$f(x) = \begin{cases} |x-1|, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 1 \\ -(x-1), & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ = ...

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ = ...

$f(1)$ = ...

(6) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1}x^2, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x-1}{x-1}\right)x^2, & x > 1 \\ -\left(\dfrac{x-1}{x-1}\right)x^2, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ -x^2, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ = ...

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ = ...

$f(1)$ = ...

2.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถหาได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง
3. การให้เหตุผล
4. การคิดสร้างสรรค์

บทนิยาม

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วงเปิด (a, b) และ $c \in (a, b)$

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(c)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ หาค่าได้

และ 3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

หมายเหตุ

1. ถ้าฟังก์ชัน f ขาดสมบัติข้อใดข้อหนึ่ง แล้วฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
2. ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = a$ กราฟของฟังก์ชันไม่ขาดตอนที่ $x = a$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่า $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $f(3)$ หาค่าไม่ได้ $\left[\dfrac{3^2 - 9}{3 - 3} = \dfrac{0}{0}\right]$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & , \ x \neq 3 \\ 6 & , \ x = 3 \end{cases}$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่

วิธีทำ จาก $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & , \ x \neq 3 \\ 6 & , \ x = 3 \end{cases}$

ตอบ

ทฤษฎีบท 4

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

1. $f+g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
2. $f-g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
3. $f \cdot g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
4. $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ $g(a) \neq 0$

ทฤษฎีบท 5

สำหรับจำนวนจริงใด ๆ ฟังก์ชันพหุนาม $p(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ทฤษฎีบท 6

ถ้า f เป็นฟังก์ชันตรรกยะโดยที่ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $q(a) \neq 0$

เช่น กำหนดให้ $f(x) = 2x$ และ $g(x) = x+1$ ต่อเนื่องที่ $x = 1$

จะได้ $f(x)+g(x) = 3x+1$ ต่อเนื่องที่ $x = 1$

$f(x)-g(x) = x-1$ ต่อเนื่องที่ $x = 1$

$f(x)\cdot g(x) = 2x(x+1)$ ต่อเนื่องที่ $x = 1$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x}{x+1}$ ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ความต่อเนื่องบนช่วง

การพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง

1. (a, b) ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (a, b)
2. $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ $\begin{cases} \text{(1) f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง } (a, b) \text{ และ} \\ \text{(2) } \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ และ } \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$
3. $(a, b]$ ก็ต่อเมื่อ $\begin{cases} \text{(1) f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง } (a, b) \text{ และ} \\ \text{(2) } \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$
4. $[a, b)$ ก็ต่อเมื่อ $\begin{cases} \text{(1) f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง } (a, b) \text{ และ} \\ \text{(2) } \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \end{cases}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-4, 4]$

วิธีทำ ให้ c เป็นจุดใด ๆ ในช่วง $(-4, 4)$

จาก $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

จะได้ $f(x) = \sqrt{16-c^2}$

และ $\lim\limits_{x \to c} f(c) = \lim\limits_{x \to c} \sqrt{16-x^2}$

$= \sqrt{16-c^2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-4, 4)$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = f(-4)$ และ $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -4^+} f(x) &= \lim_{x \to -4^+} \sqrt{16 - x^2} \\
&= \sqrt{\lim_{x \to -4^+} (16 - x^2)} \\
&= \sqrt{16 - (-4)^2} = 0
\end{aligned}$$

และ $\quad f(-4) = \sqrt{16 - (-4)^2} = 0$

จะได้ $\quad \lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = f(-4)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4^-} f(x) &= \lim_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2} \\
&= \sqrt{\lim_{x \to 4^-} (16 - x^2)} \\
&= \sqrt{16 - 4^2} = 0
\end{aligned}$$

และ $\quad f(4) = \sqrt{16 - 4^2} = 0$

จะได้ $\quad \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-4, 4]$ **ตอบ**

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1. กำหนดฟังก์ชัน f จงพิจารณาฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $f(x) = \sqrt{2x - 5} + 3x$ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 4$ หรือไม่

วิธีทำ $f(4) =$ ....

$=$ ....

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (\sqrt{2x - 5} + 3x)$

$=$ ....

$=$ ....

ดังนั้น $f(4) =$ ....

นั่นคือ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ที่ $x =$ ....

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = -5$ หรือไม่

วิธีทำ $f(-5) =$ ....

$=$ ....

$\lim\limits_{x \to -5} f(x) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

....

....

....

(3) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ หรือไม่

วิธีทำ จาก $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

ให้ $p(x) = x^2-9$

$p(0) =$ ....

และ $q(x) = x^2-5x+6$

$q(0) =$ ....

เนื่องจาก p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนาม

และ $q(0) \neq 0$

ดังนั้น ....

(4) $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x+1}$ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = -1$ หรือไม่

วิธีทำ $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x+1}$

$f(-1) =$ ....

....

....

2. กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ จงพิจารณาฟังก์ชันในแต่ละข้อ

(1) $f(x) = \begin{cases} 3x &, x \leq 2 \\ x^2 &, x > 2 \end{cases}$ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ $f(2) =$ ....

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$ ....

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$ ....

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$ ....

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ....

....

(2) $f(x) = \begin{cases} x^3 &, x \leq 2 \\ 4-2x &, x > 2 \end{cases}$ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ $f(2) =$ ....

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$ ....

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$ ....

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$ ....

ดังนั้น ....

....

(3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-3x} & , x < -3 \\ \sqrt[3]{x+2} & , x \geq -3 \end{cases}$ ฟังก์ชัน f

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = -3$ หรือไม่

วิธีทำ $f(-3)$ = ...

$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ = ...

....

....

(4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{x^2} & , x \leq -3 \\ 4+x & , x > -3 \end{cases}$ ฟังก์ชัน f

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = -3$ หรือไม่

วิธีทำ $f(-3)$ = ...

$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ = ...

$f(-3)$ ..=... $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

....

....

(5) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 1 \\ 2 & , x = 1 \\ 4-x^2 & , x > 1 \end{cases}$ ฟังก์ชัน f

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่

วิธีทำ $f(1)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ = ...

....

....

(6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4+x}{x} & , x \neq 0 \\ 4+x & , x = 0 \end{cases}$ ฟังก์ชัน f

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ หรือไม่

วิธีทำ $f(0)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ = ...

= ....

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ = ...

= ....

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ = ...

$f(0)$ ...... $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

....

....

(7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1+x} & , \ x \neq -1 \\ 1 & , \ x = -1 \end{cases}$ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = -1$ หรือไม่

วิธีทำ $f(-1)$ = ...

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ = ...

= ....

= ....

= ....

= ....

$f(-1)$ ...... $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

....

....

(8) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-x-6}{x^2-3x+2} & , \ x \neq 2 \\ 7 & , \ x = 2 \end{cases}$ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ $f(2)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ = ...

= ....

= ....

= ....

= ....

$f(2)$.=. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

....

....

(9) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-5|}{x-5} & , \ x \neq 5 \\ 1 & , \ x = 5 \end{cases}$ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 5$ หรือไม่

วิธีทำ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{x-5} & , x > 5 \\ \dfrac{-(x-5)}{x-5} & , x < 5 \\ 1 & , x = 5 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , \ x \geqslant 5 \\ -1 & , \ x < 5 \end{cases}$$

$f(5)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$ = ...

$\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ = ...

....

(10) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่

วิธีทำ

$f(1) =$ ....

$\lim_{x \to 1} f(x) =$ ....

.... $=$ ....

.... $=$ ....

$f(1)$ ...... $\lim_{x \to 1} f(x)$

....

(11) $f(x) = |2x-1|$ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = \frac{1}{2}$ หรือไม่

วิธีทำ

$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1) & , x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) =$ ....

$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) =$ ....

$=$ ....

$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) =$ ....

x

$=$ ....

$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) =$ ....

....

....

(12) $f(x) = \begin{cases} 7x-2 & , x \geq 2 \\ 3x+5 & , x < 2 \end{cases}$ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ $f(2) =$ ....

$\lim_{x \to 2^-} f(x) =$ ....

$\lim_{x \to 2^+} f(x) =$ ....

$\lim_{x \to 2} f(x) =$ ....

....

3. จงหาค่าของ c ที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, \infty)$

(1) $f(x) = \begin{cases} cx^2-3 & , \quad x \leq 2 \\ cx+2 & , \quad x > 2 \end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, \infty)$

ดังนั้น

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

$$c(2)+2 = c(2)^2-3$$

$$2c+2 = 4c-3$$

....

....

(2) $f(x) = \begin{cases} c^2x & , \quad x < 1 \\ 3cx-2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, \infty)$..

ดังนั้น $\lim_{x \to 1} f(x) =$ ....

....

....

....

....

....

....

4. จงหาค่าของ c และ d ที่ทำให้ f(x) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-3, 3)$

$$f(x) = \begin{cases} 2c & , \quad x = -3 \\ \dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} & , \quad |x| < 3 \\ d-1 & , \quad x = 3 \end{cases}$$

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง..

จาก

$$f(x) = \begin{cases} 2c & , \quad x = -3 \\ \dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} & , \quad |x| < 3 \\ d-1 & , \quad x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2c & \text{..............................} \\ 4+\sqrt{x^2+7} & \text{..............................} \\ \text{..........} & \text{..............................} \end{cases}$$

พิจารณาฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = -3$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3)$

$4+\sqrt{3^2+7} =$ ....

$c =$ ....

พิจารณาฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x =$ ....

ดังนั้น ....

....

....

ข้อสังเกต

$$\frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} = \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{(4-\sqrt{x^2+7})(4+\sqrt{x^2+7})}$$

$$= \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{9-x^2}$$

$$= 4+\sqrt{x^2+7}$$

5. จงหาจำนวนทุกจำนวนที่ทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่อง

(1) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x^2-x-3}$

วิธีทำ $f(x) = \dfrac{3x-5}{(2x-3)(x+1)}$

เนื่องจาก $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ และ..................หาค่าไม่ได้

ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x =$ .... และ $x =$ ....

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ ....

(2) $f(x) = \sqrt{2x-5}+x^2$

วิธีทำ เนื่องจาก $2x-5 \geqslant$ ....

$x \geqslant$ ....

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ ....

(3) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $x^2-1 > 0$

....

....

ดังนั้น..

2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

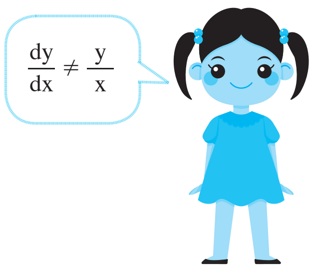
1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง
3. การให้เหตุผล
4. การคิดสร้างสรรค์

บทนิยาม

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าได้ แล้วเรียกค่าของลิมิตที่ได้นี้ว่า **อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x** เขียนแทนด้วย $f'(x)$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x อาจใช้ $\frac{dy}{dx}$ อ่านว่า ดีวายบายดีเอกซ์ หรือใช้ y' หรือใช้ $\frac{d}{dx}f(x)$

นั่นคือ $f'(x) = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}f(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$



บทนิยาม

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน และ $a \in D_f$ แล้ว

(1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$ คือ $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

(2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = a$ คือ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = x^2 - 3$ จงหา

(1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2.2

(2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x = 2

วิธีทำ จาก $y = x^2 - 3$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2+h คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{[(2+h)^2-3]-[2^2-3]}{h}\\ &= \frac{4+4h+h^2-3-4+3}{h}\\ &= \frac{h(h+4)}{h}\\ &= h+4\end{aligned}$$

(1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2.2

เท่ากับ $0.2+4 = 4.2$ $(h = 2.2-2 = 0.2)$ **ตอบ**

(2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x = 2 เท่ากับ $\lim_{h \to 0} (h+4) = 0+4 = 4$ **ตอบ**

แบบฝึกหัดที่ 2.3

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\end{aligned}$$

= ....

= ....

= ....

= ....

(2) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{h}\cdot\frac{(x+h)^{\frac{2}{3}}+(x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}{(x+h)^{\frac{2}{3}}+(x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^{\frac{1}{3}}\right]^3-(x^{\frac{1}{3}})^3}{h\left[(x+h)^{\frac{2}{3}}+(x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left[(x+h)^{\frac{2}{3}}+(x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right]}$$

= ....

= ....

= ....

(3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{(x+h)^2x^2h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2h}$$

= ....

= ....

= ....

(4) $f(x) = 2x^3-3$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[2(x+h)^3-3]-(2x^3-3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-3]-2x^3+3}{h}$$

= ....

= ....

= ....

= ....

2. กำหนด $A = \pi r^2$ เมื่อ A แทนพื้นที่วงกลม และ r เป็นรัศมีของวงกลม

(1) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ A เทียบกับ r เมื่อ r เปลี่ยนจาก 7 เซนติเมตร เป็น 7.7 เซนติเมตร

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ A เทียบกับ r เมื่อ r เปลี่ยนเป็น $r+h$ เท่ากับ

$$\frac{f(r+h)-f(r)}{h} = \frac{\pi(r+h)^2-\pi r^2}{h}$$

= ....

= ....

= ....

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ A เทียบกับ r เมื่อ r เปลี่ยนจาก 7 เซนติเมตร เป็น 7.7 เซนติเมตร เท่ากับ

$[2(7)+0.7]\pi$ ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

= .... ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

(2) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ A เทียบกับ r ขณะ r ใด ๆ

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ A เทียบกับ r ขณะ r ใด ๆ

$\lim_{h \to 0} (2r+h)\pi$

= .... (ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม)

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ A เทียบกับ r ขณะ $r = 7$ เซนติเมตร

= .... ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

= .... ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

3. จงหา

(1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้านเมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 10 เซนติเมตร เป็น 10.2 เซนติเมตร

วิธีทำ ให้ A แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ x เซนติเมตร

ดังนั้น $A = x^2$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ A เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนเป็น x+h เท่ากับ

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \text{..}$$

$$= \text{..}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้านในช่วง 10 เซนติเมตร ถึง 10.2 เซนติเมตร เท่ากับ .... ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

(2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ A เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ A เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ เท่ากับ

$$\lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวด้าน ขณะด้านยาว 10 เซนติเมตร เท่ากับ...............................ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

ข้อสังเกต

การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยสามารถหาได้จาก

$$\frac{(10.2)^2-10^2}{0.2} = \frac{104.04-100}{0.2} = 20.2$$

4. จงหา

(1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 4 เซนติเมตร เป็น 4.4 เซนติเมตร

วิธีทำ ให้ $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ แทนพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ x เซนติเมตร

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ A เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก x เป็น x+h

เท่ากับ $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}(x+h)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2}{h}$

= ....

= ....

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเทียบกับความยาวของด้านในช่วง 4 ถึง 4.4 เซนติเมตร เท่ากับ .... ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

(2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเทียบกับความยาวของด้าน ขณะด้านยาว 4 เซนติเมตร

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ A เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ เท่ากับ

....

อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเทียบกับความยาวของด้านขณะด้านยาว 4 เซนติเมตร เท่ากับ

.... ตารางเซนติเมตรต่อเซนติเมตร

ตรวจสอบอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ A เทียบกับ x ในช่วง 4 ถึง 4.4 เซนติเมตร

....

5. จงหา

(1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรทรงกลมเทียบกับรัศมี เมื่อรัศมีเปลี่ยนจาก r เป็น r+h

วิธีทำ ให้ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ แทนปริมาตรทรงกลมรัศมี r เซนติเมตร

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ V เทียบกับ r เมื่อ r เปลี่ยนเป็น r+h เท่ากับ

$$\frac{\frac{4}{3}\pi(r+h)^3-\frac{4}{3}\pi r^3}{h}$$

= ....

= ....

(2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรทรงกลมเทียบกับรัศมี ขณะรัศมียาว r เซนติเมตร

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ V เทียบกับ r ขณะ r ใด ๆ เท่ากับ

= $\lim\limits_{h\to 0}$ ....

= ....

= .... ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อเซนติเมตร

ข้อสังเกต

อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรทรงกลมเทียบกับรัศมีเท่ากับ

....

6. กำหนด $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ แทนปริมาตรกรวยสูง h เซนติเมตร และรัศมีฐานยาว r เซนติเมตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ V เทียบกับ r เมื่อ h คงตัว

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ V เทียบกับ r เมื่อ h คงตัว เท่ากับ

$$\lim_{d \to 0} \frac{\frac{1}{3}\pi(r+d)^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h}{d}$$

= ....

= ....

= ....

= ....

7. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรลูกบาศก์เทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 10 เป็น 12 เซนติเมตร

วิธีทำ ให้ $V = x^3$ แทนปริมาตรลูกบาศก์ยาวด้านละ x เซนติเมตร

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ V เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 10 เป็น 12 เซนติเมตร

เท่ากับ $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

= ....

= ....

= ....

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรของลูกบาศก์เทียบกับความยาวของด้านในช่วง 10 ถึง 12 เซนติเมตร เท่ากับ .... ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อเซนติเมตร

8. ให้ $y = \frac{1}{x^2}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 4 เป็น 5 และอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x = 4

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง x+h เท่ากับ

$$\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$$

$$= \frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2h}$$

= ....

= ....

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 4 เป็น 5 เท่ากับ

....

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ

เท่ากับ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

= ....

= ....

= ....

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x = 4 เท่ากับ..

2.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตรได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง
4. การให้เหตุผล
5. การคิดสร้างสรรค์

สูตรที่ 1 ถ้า $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $f'(x) = 0$

เช่น 1. $y = 7$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(7) = 0$

2. $y = -\frac{3}{2}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$

สูตรที่ 2 ถ้า $f(x) = x$ แล้ว $f'(x) = 1$

เช่น $y = x$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$

สูตรที่ 3 ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ n ป็นค่าคงตัว แล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$

เช่น 1. $y = x^5$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$

2. $y = \frac{1}{x^3}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-3}) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

3. $y = x^{\frac{1}{3}}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

สูตรที่ 4 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$

เช่น

$$y = x^2+x^4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+x^4)$$

$$=$$

$$=$$

สูตรที่ 5 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

$(f-g)'(x) = f'(x)-g'(x)$

เช่น

$$y = x-x^6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x-x^6)$$

$$=$$

$$=$$

สูตรที่ 6 ถ้า c เป็นค่าคงตัว และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

$(cf)'(x) = c(f'(x))$

เช่น

$$y = \frac{x^3}{3}+2x^2-x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}+2x^2-x\right)$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

สูตรที่ 7 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

เช่น

$$y = (x^3-3x^2)\left(\frac{x^4}{4}-5\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(x^3-3x^2)\left(\frac{x^4}{4}-5\right)\right]$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

สูตรที่ 8 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

เช่น

$$y = \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$\frac{dy}{dx} =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

ช่วยจำ 1. $y = pq$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{d}{dx}(q) + q\dfrac{d}{dx}(p)$

2. $y = \dfrac{p}{q},\ q \neq 0$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{q\dfrac{d}{dx}(p) - p\dfrac{d}{dx}(q)}{q^2}$

แบบฝึกหัดที่ 2.4

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $y = 12$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(12)$

$= $ ....

(2) $y = \pi$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\pi)$

$= $ ....

(3) $y = \sqrt[3]{x}$

$= x^{\frac{1}{3}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$

$= \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$

$= $ ....

$= $ ....

(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$= x^{-\frac{1}{2}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$= -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}$

$= $ ....

$= $ ....

(5) $y = \frac{2}{3}x^3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x^3\right)$

$= \frac{2}{3}\frac{d}{dx}(x^3)$

= ....

= ....

(6) $y = \frac{6}{x^2}$

$= 6x^{-2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^{-2})$

$= 6\frac{d}{dx}(x^{-2})$

= ....

= ....

(7) $y = x+x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x+x^2)$

$= \frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(x^2)$

= ....

(8) $y = x^3-x$

$\frac{dy}{dx}$ = ...

= ....

= ....

(9) $y = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

$= x^{-1}+x^{-2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-1}+x^{-2})$

$= \frac{d}{dx}(x^{-1})+\frac{d}{dx}(x^{-2})$

= ....

= ....

(10) $y = \frac{x}{2}-\frac{2}{x}$

$= \frac{1}{2}x-2x^{-1}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x-2x^{-1}\right)$

$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x)-2\frac{d}{dx}(x^{-1})$

= ....

= ....

(11) $y = 4x^2-5$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^2-5)$

$= 4\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(5)$

= ....

= ....

(12) $y = 1-\frac{1}{2}x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)$

$= \frac{d}{dx}(1)-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2)$

= ....

= ....

(13) $y = (2x+1)^2$

$= 4x^2+4x+1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^2+4x+1)$

$= 4\frac{d}{dx}(x^2)+4\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(1)$

= ....

= ....

(14) $y = (x+2)^3$

= ....

$\frac{dy}{dx}$ = ...

= ....

= ....

= ....

(15) $y = (x-2)(2x+3)$

$= 2x^2-x-6$

$\frac{dy}{dx}$ = ...

= ....

= ....

= ....

(16) $y = (3x-2)(3x+2)$

= ....

$\frac{dy}{dx}$ = ...

= ....

= ....

= ....

(17) $y = \sqrt{2x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$

= ....

= ....

(18) $y = \frac{x^2-2x-3}{x^2}$

$= \frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}$

$= 1-2x^{-1}-3x^{-2}$

$\frac{dy}{dx}$ = ...

= ....

= ....

(19) $y = x(\sqrt{x}-x)$

$= x^{\frac{3}{2}}-x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{d}{dx}(x^2)$

= ....

(20) $y = x^3(\sqrt{x}+x^2)$

= ....

$\frac{dy}{dx}$ = ...

= ....

(21)

$$y = x\left(10-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 10x-x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(22)

$$y = \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$= (\sqrt{x})^2+2(\sqrt{x})\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$= x+2+x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(23)

$$y = \frac{2x+3}{3x-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-2)\frac{d}{dx}(2x+3)-(2x+3)\frac{d}{dx}(3x-2)}{(3x-2)^2}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(24)

$$y = (x^7-x)(x^4-x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^7-x)\frac{d}{dx}(x^4-x^3)+(x^4-x^3)\frac{d}{dx}(x^7-x)$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(25)

$$y = \frac{4x-1}{x^2-5}$$

2

$$\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ ณ จุดที่กำหนดให้

(1) $f(x) = 3x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ที่ $x = 1$

$= 3x^{\frac{4}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}$

$f'(x) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$f'(x) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(2) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 4}$ ที่ $x = -3$

$f'(x) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$f'(-3) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

3. วัตถุชนิดหนึ่งเคลื่อนที่ตามสมการ $s = 2t^2-3t-4$ เมื่อ s เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วของวัตถุในขณะ $t = 10$ วินาที

วิธีทำ

$$s = 2t^2-3t-4$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2-3t-4)$$

....

....

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ เท่ากับ .... เมตรต่อวินาที

ความเร็วของวัตถุขณะ $t = 10$ วินาที เท่ากับ .... เมตรต่อวินาที

4. ถ้า b เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & , -\infty < x < 1 \\ x+b & , 1 \leqslant x < \infty \end{cases}$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด $x = b$

วิธีทำ จาก $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & , -\infty < x < 1 \\ x+b & , 1 \leqslant x < \infty \end{cases}$

เนื่องจาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ = ...

$1-1^2$ = ...

b = ...

หาอนุพันธ์ของ $f(x)$ ที่จุด x = ...

$f'(x)$ = ...

$f'(\text{..........})$ = ...

5. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ $f(-1) = 2$ และ $f'(-1) = -5$

ถ้า $y = (x^3-2x^2)f(x)$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $x = -1$ มีค่าเท่าไร

วิธีทำ จาก $y = (x^3-2x^2)f(x)$

$\frac{dy}{dx}$ = ...

= ....

ที่ $x = -1$; $\frac{dy}{dx}$ = ...

= ....

= ....

= ....

= ....

2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง
4. การให้เหตุผล
5. การคิดสร้างสรรค์

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ เรียกว่า **กฎลูกโซ่ (chain rule)**

สูตร ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และฟังก์ชัน g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$ แล้วฟังก์ชัน $g \circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

จากสูตร ถ้า $u = f(x)$, $y = g(u) = g(f(x))$ และ $\frac{dy}{du}, \frac{du}{dx}$ หาค่าได้แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $y = (3x^2+1)^4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $u =$

จะได้ $y =$

$\frac{dy}{du} =$

และ $\frac{du}{dx} =$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} =$

$=$

$=$

$=$ **ตอบ**

เพื่อความสะดวกในการหาฟังก์ชันประกอบ สามารถหาได้จากสูตร

$$y = u^n$$
$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

จากตัวอย่าง $y = (3x^2+1)^4$

$\frac{dy}{dx} =$

$=$

$=$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $y = \frac{1}{(2x-x^3)^2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \frac{1}{(2x-x^3)^2}$

$y =$

$\frac{dy}{dx} =$

$=$

$=$ **ตอบ**

แบบฝึกหัดที่ 2.5

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $y = (2x-3)^5$

$\frac{dy}{dx} = 5(2x-3)^4\frac{d}{dx}(2x-3)$

$= 5(2x-3)^4(2)$

$=$ ....

(2) $y = (5-4x^3)^4$

$\frac{dy}{dx} = 4(5-4x^3)^3\frac{d}{dx}(5-4x^3)$

$=$ ....

$=$ ....

(3) $y = \sqrt{5-8x}$

$= (5-8x)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(5-8x)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(5-8x)$

$= \frac{1}{2}(5-8x)^{-\frac{1}{2}}(-8)$

$= -4(5-8x)^{-\frac{1}{2}}$

= ....

= ....

(4) $y = \sqrt[3]{x^2+3x^4}$

$= (x^2+3x^4)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{dy}{dx}$ = ...

= ....

= ....

= ....

(5) $y = \frac{1}{2x^2-3x-4}$

$= (2x^2-3x-4)^{-1}$

$\frac{dy}{dx} = -1(2x^2-3x-4)^{-2}\frac{d}{dx}(2x^2-3x-4)$

= ....

= ....

(6) $y = \frac{1}{(3x-5)^2}$

$= (3x-5)^{-2}$

$\frac{dy}{dx} = -2(3x-5)^{-3}\frac{d}{dx}(3x-5)$

= ....

= ....

(7) $y = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ ....

$= (4x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx}$ = ...

= ....

= ....

(8) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1-5x^2}}$

= ....

$\frac{dy}{dx}$ = ...

= ....

= ....

(9) $y = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^5}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(10) $y = \dfrac{5}{\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $y = (x+5)^4(x^2+1)^3$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = (x+5)^4\dfrac{d}{dx}(x^2+1)^3+(x^2+1)^3\dfrac{d}{dx}(x+5)^4$

$= (x+5)^4\left[3(x^2+1)^2\dfrac{d}{dx}(x^2+1)\right]+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= (x+5)^4\,[3(x^2+1)^2(2x)]+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 6x(x+5)^4\,(x^2+1)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(2) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

วิธีทำ

$$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{(x-1)\frac{d}{dx}(x+1)-(x+1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}\right]$$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ....

= ....

= ....

= ....

(3) $y = (1-x)^4(1+x)^{-5}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}$ = ...

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

(4) $y = \left(\dfrac{1-2x}{2x-1}\right)^4$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx}$ = ...

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

ข้อสังเกต

$\dfrac{1-2x}{2x-1} = \dfrac{-(2x-1)}{2x-1} = -1$ เป็นค่าคงตัว ดังนั้น $\dfrac{d}{dx}(-1) = 0$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2\sqrt{1+x^3}$ ที่ $x = 2$ และหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ได้ที่จุดใด

วิธีทำ $f(x) = x^2\sqrt{1+x^3}$

= ....

$f'(x)$ = ...

....

....

....

....

....

....

....

หาอนุพันธ์ของ $f(x)$ ไม่ได้เมื่อ ....

....

....

4. กำหนดให้ $g(x) = [f(x)]^4$ ถ้า $f(1) = 2$ และ $f'(1) = \frac{5}{2}$ จงหาค่าของ $g'(1)$

วิธีทำ จาก $g(x) = [f(x)]^4$

$g'(x) =$ ....

$g'(1) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2}{2 - x^2}$ และ $g(x) = \sqrt{1 - 3x}$ จงหา $F'(-1)$ เมื่อ $F(x) = f(g(x))$

วิธีทำ

$$F(x) = f(g(x))$$

$$= f(\sqrt{1-3x})$$

$$= f\left((1-3x)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{[(1-3x)^{\frac{1}{2}}]^2}{2-[(1-3x)^{\frac{1}{2}}]^2}$$

$=$ ....

$=$ ....

$F'(x)$ = ...

= ....

= ....

= ....

....

....

....

6. กำหนดให้ $g(3) = 5, g'(3) = 4, f(3) = 7, f'(5) = 6, g'(7) = 8$ และ $f'(3) = 9$

(1) ถ้า $F(x) = f(g(x))$ จงหา $F'(3)$

วิธีทำ จาก

$$F(x) = f(g(x))$$
$$F'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$F'(3) = f'(g(3))\cdot g'(3)$$

= ....

= ....

= ....

(2) ถ้า $F(x) = g(f(x))$ จงหา $F'(3)$

วิธีทำ จาก

$$F(x) = g(f(x))$$
$$F'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

$F'(3)$ = ...

= ....

= ....

= ....

7. กำหนดให้ $f(x) = x^2-6x+c$ โดยที่ c เป็นจำนวนจริง ถ้า a และ b เป็นคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ และ $3a+2b = 20$ แล้ว $f'(c)$ มีค่าเท่าไร

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2-6x+c$ .....(1)

$f'(x) =$ ....

a และ b เป็นคำตอบของสมการ $f(x) = 0$

ดังนั้น $(x-a)(x-b) = 0$

$x^2-(a+b)x+$.......... $=$ ....(2)

จาก (1) และ (2) โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$a+b =$ ....(3)

$ab =$ ....(4)

จากกำหนด $3a+2b = 20$ .....(5)

$(3)\times 2$; $2a+$.......... $=$ ....(6)

$(5)-(6)$; $a =$ ....

แทนค่า a ใน (3); $b =$ ....

แทนค่า a และ b ใน (4); $c =$ ....

จาก $f'(x) = 2x-6$ จะได้ $f'(c) =$ ....

....

....

8. กำหนดให้ $f(x) = x^2-2|x|$ และ $g(x) = x^2+1$ จงหา $(g\circ f)'(-3)+(f\circ g)'(3)$

วิธีทำ $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(x^2-2|x|)$

$= (x^2-2|x|)^2+1$

$(g\circ f)'(x) =$ ....

$=$ ....

$(g\circ f)'(-3) =$ ....

$=$ ....

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(x^2+1)$

$=$ ....

$(f\circ g)'(x) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$(f\circ g)'(3) =$ ....

$=$ ....

ดังนั้น $(g\circ f)'(-3)+(f\circ g)'(3) =$ ....

$=$ ....

2.6 เส้นสัมผัสเส้นโค้ง

จุดประสงค์

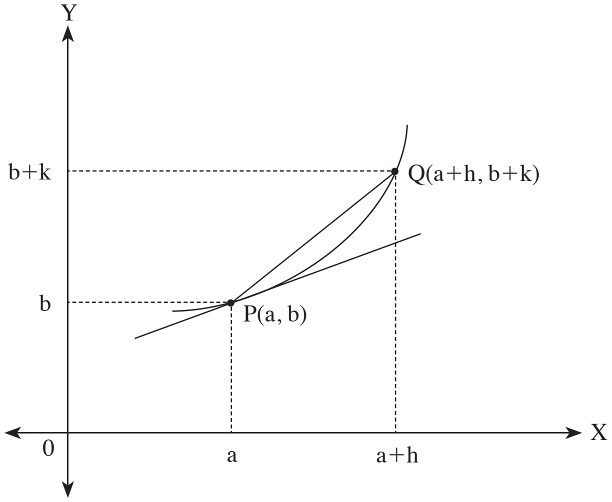
นักเรียนสามารถหาความชันของเส้นโค้งและสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง
4. การให้เหตุผล
5. การคิดสร้างสรรค์

ให้ $y = f(x)$ เป็นสมการเส้นโค้ง

$P(a, b)$ และ $Q(a+h, b+k)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง โดยที่ $h \neq 0$



ส่วนของเส้นตรง PQ เป็นเส้นตัดกราฟ

ความชัน $\overline{PQ}$ เท่ากับ $\dfrac{(b+k)-b}{(a+h)-a} = \dfrac{k}{h}$

เนื่องจาก $f(a) = b$ และ $f(a+h) = b+k$

ดังนั้น ความชัน $\overline{PQ}$ เท่ากับ $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

นั่นคือ $\dfrac{k}{h} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

บทนิยาม

ถ้า $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $P(x, y)$ หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P

ตัวอย่าง ถ้า $y = x-x^2$ เป็นสมการเส้นโค้ง จงหา

(1) ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, -2)$

(2) สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, -2)$

วิธีทำ (1) ให้ $f(x) = x-x^2$

ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, -2)$ เท่ากับ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(2+h)-(2+h)^2\right]-(2-2^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(2+h)-(4+4h+h^2)\right]-(2-4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-3h-h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(-3-h)$$

$$= -3$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, -2)$ เท่ากับ -3 **ตอบ**

(2) สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1)และมีความชันเท่ากับ m คือ

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, -2)$ คือเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, -2)$ และมีความชันเท่ากับ -3

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, -2)$ คือ

$$\begin{aligned} y-(-2) &= -3(x-2) \\ y+2 &= -3x+6 \\ 3x+y-4 &= 0 \end{aligned}$$

ตอบ

แบบฝึกหัดที่ 2.6

1. จงหาความชันของเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ และหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดนั้น

(1) $y = x^3$ ที่จุด $(2, 8)$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^3$

ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, 8)$ เท่ากับ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2^3+3(2)^2h+3(2)h^2+h^3)-2^3}{h}$$

= ....

= ....

= ....

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, 8)$ เท่ากับ ....

สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, 8)$ และมีความชันเท่ากับ ....

คือ $y-8$ = ...

....

....

(2) $y = \frac{1}{x^2}$ ที่จุด $(-1, 1)$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{x^2}$

ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(-1, 1)$ เท่ากับ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(-1+h)^2}-\frac{1}{(-1)^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1-2h+h^2}-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1-(1-2h+h^2)}{(1-2h+h^2)h}$$

$=$ ....

$=$ ....

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(-1, 1)$ เท่ากับ ....

สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-1, 1)$ และมีความชันเท่ากับ ....

คือ ....

....

....

....

(3) $y = \sqrt{x+1}$ ที่จุด $x = 3$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \sqrt{x+1}$

$f(3) = \sqrt{3+1} =$ ....

จุดสัมผัสบนเส้นโค้งคือ ....

ความชันของเส้นโค้งที่จุด $x = 3$ เท่ากับ

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+1} - \sqrt{3+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2}$$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด (3, ...) เท่ากับ ....

สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (.........., ...) และมีความชันเท่ากับ ....

คือ ....

....

....

....

(4) $y = \frac{4}{x+1}$ ที่จุด $x = 2$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{4}{x+1}$

$f(2) = \frac{4}{2+1}$ ....

จุดสัมผัสบนเส้นโค้งคือ ....

ความชันของเส้นโค้งที่จุด $x = 2$ เท่ากับ

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด .... เท่ากับ..

สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด .... และมีความชันเท่ากับ ....

คือ ....

....

....

....

2. กำหนดสมการเส้นโค้ง จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งและสมการของเส้นแนวฉากที่จุดที่กำหนดให้

(1) $y = x^3 - 1$ ที่ $x = -1$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^3 - 1$

$f'(x) =$ ....

$f'(-1) =$ ....

หาจุดสัมผัสที่ $x = -1, y =$ ....

จุดสัมผัสบนเส้นโค้งคือ .... และความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ ....

สมการเส้นสัมผัสคือ ....

....

....

....

จุดตัดเส้นโค้งกับเส้นแนวฉากคือ..........

ความชันของเส้นแนวฉากซึ่งตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเท่ากับ ....

สมการของเส้นแนวฉากคือ ....

....

....

....

(2) $y = \frac{x^2 - 2}{x}$ ที่ $x = -2$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$

$= \frac{x^2}{x} - \frac{2}{x}$

$=$ ....

$f'(x) =$ ....

$=$ ....

$f'(-2) =$ ....

$=$ ....

หาจุดสัมผัสที่ $x = -2, y =$ ....

จุดสัมผัสบนเส้นโค้งคือ .... และความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ ....

สมการเส้นสัมผัสคือ ....

....

....

....

จุดตัดเส้นโค้งกับเส้นแนวฉากคือ ....

ความชันของเส้นแนวฉากซึ่งตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเท่ากับ ....

สมการของเส้นแนวฉากคือ ....

....

....

....

3. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x(x-2)^2+3$ ที่จุด $(2, 3)$ และหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดบนเส้นโค้งที่มีความชันเท่ากับ -1

วิธีทำ

$$y = x(x-2)^2+3$$

$$y = x(x^2-4x+4)+3$$

$y =$ ....

$\dfrac{dy}{dx} =$ ....

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, 3)$ เท่ากับ ....

สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่มีความชันเท่ากับ .... และผ่านจุด ....

คือ ....

....

หาจุดบนเส้นโค้งที่มีความชันเท่ากับ -1

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

....

....

....

....

....

เมื่อ $x =$ .... ค่าของ $y =$ ....

จุดสัมผัสบนเส้นโค้งที่มีความชันเท่ากับ -1 คือ ....

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสที่มีความชันเท่ากับ -1 และผ่านจุด .... คือ

....

....

....

เมื่อ $x =$ .... ค่าของ $y =$ ....

จุดสัมผัสบนเส้นโค้งที่มีความชัน -1 คือ ....

สมการของเส้นสัมผัสที่มีความชันเท่ากับ -1 และผ่านจุด ....

คือ ....

....

....

4. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-3, -2)$ และขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3-x^2-x+2$ ที่จุด $x = 2$

วิธีทำ

$$y = x^3-x^2-x+2$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{...}$$

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $x = 2$ เท่ากับ ....

เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-3, -2)$ มีความชันเท่ากับ ....

(เส้นตรงสองเส้นขนานกันจะมีความชันเท่ากัน)

ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่ต้องการคือ ....

....

....

....

5. ถ้าเส้นตรง $ax+by+c = 0$ สัมผัสเส้นโค้ง $y = a(2x-1)^2$ ที่จุด $(1, 2)$ จงหาสมการของเส้นสัมผัส

วิธีทำ จุด $(1, 2)$ อยู่บนเส้นโค้ง $y = a(2x-1)^2$

จะได้ $2 = a(2(1)-1)^2$

$$a = \text{..}$$

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{d}{dx}(2x-1)^2$$

$$= \text{..}$$

$$= \text{..}$$

$$= \text{..}$$

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, 2)$ เท่ากับ ....

สมการเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด $(1, 2)$ และมีความชันเท่ากับ .... คือ

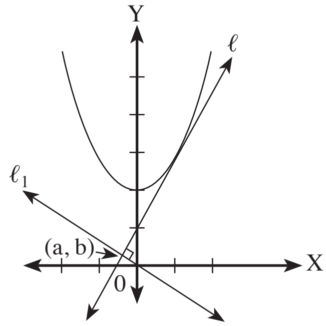
....

....

....

6. กำหนดให้เส้นตรง ℓ มีความชันเท่ากับ 2 และสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2+2$ ถ้าจุด (a, b) อยู่บนเส้นตรง ℓ และอยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด จงหาค่าของ $a+b$

วิธีทำ เขียนกราฟประกอบดังนี้



จาก $\quad y = x^2+2 \quad$ .....(1)

$\dfrac{dy}{dx} = $ ....

เส้นตรงมีความชันเท่ากับ 2

ดังนั้น $\quad 2x = $ ....

$x = $ ....

จาก (1) จะได้ $y = $ ....

จุดสัมผัสบนเส้นโค้งคือ ....

สมการของเส้นสัมผัสที่มีความชันเท่ากับ 2 และผ่านจุด ....

คือ ....

....

....

หาจุดที่เส้นสัมผัสแกน X เมื่อ $y = 0$ จะได้ $x = $ ....

จุด (a, b) คือ จุดที่เส้นตรงซึ่งผ่านจุดกำเนิดและตัดกับเส้นสัมผัสเป็นมุมฉาก

ให้ ℓ_1 ตัดกับ ℓ สมการของ ℓ_1 ที่ผ่านจุด $(0, 0)$ และมีความชันเท่ากับ ....

ℓ_1 มีสมการ คือ ....

จุดตัดของ ℓ_1 และ ℓ คือ ....

จะได้ (a, b) คือ ....

ดังนั้น $a+b = $ ....

2.7 อนุพันธ์อันดับสูง

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถหาอนุพันธ์อันดับสูงได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง
4. การให้เหตุผล
5. การคิดสร้างสรรค์

บทนิยาม

ให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $f'(x)$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ เรียกอนุพันธ์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x หรืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน f′ ที่ x ว่า อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x และเขียนแทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f′ ที่ x ด้วย $f''(x)$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x นอกจาก $f''(x)$ เช่น $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ และ y''

ในทำนองเดียวกัน อนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ f เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 2 เขียนแทนด้วย $f'''(x)$ หรือ $\frac{d^3y}{dx^3}$

อนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ f เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 3 เขียนแทนด้วย $f^{(4)}(x)$ หรือ $\frac{d^4y}{dx^4}$

อนุพันธ์อันดับที่ n ของ f เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ $n-1$ เขียนแทนด้วย $f^{(n)}(x)$ หรือ $\frac{d^ny}{dx^n}$

ข้อสังเกต

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ คืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x

อัตราการเปลี่ยนแปลงของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f′ ที่ x คืออนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f ที่ x

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ s เทียบกับ t ขณะ t ใด ๆ คือความเร็ว (v)

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ v เทียบกับ t ขณะ t ใด ๆ คือความเร่ง (a)

จากสมการการเคลื่อนที่ $s = f(t)$ เมื่อ s คือระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา t

$$\frac{ds}{dt} = v \quad \text{และ} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = a$$

แบบฝึกหัดที่ 2.7

1. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x) = x^5$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^5)$

$= 5x^4$

$f''(x) = 5\frac{d}{dx}(x^4)$

$= 5(4x^3)$

$=$ ....

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})$

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(3) $f(x) = x^4 - x^8$

$f'(x) =$ ....

$f''(x) =$ ....

(4) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} =$ ....

$f'(x) =$ ....

$f''(x) =$ ....

(5) $f(x) = \sqrt{1-4x}$

$=$ ....

$f'(x) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$f''(x) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$

$=$ ....

$f'(x) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$f''(x) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

(7) $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5$

$f'(x) =$ ....

$=$ ....

$f''(x) =$ ....

$=$ ....

(8) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^3}$

$= x^{\frac{1}{3}} - x^{-3}$

$f'(x) =$ ....

$=$ ....

$f''(x) =$ ....

$=$ ....

(9) $f(x) = (x^2-4)(x^3+x)$

$=$ ....

$f'(x) =$ ....

$f''(x) =$ ....

(10) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

$=$ ....

$f'(x) =$ ....

$f''(x) =$ ....

2. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x) = x^{10} - x^5 + x^2$

$f'(x) =$ ....

$f''(x) =$ ....

$=$ ....

$f'''(x) =$ ....

$=$ ....

(2) $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt{x} + x^{-\frac{3}{4}}$

$=$ ....

$f'(x) =$ ....

....

....

....

....

....

3. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x) = \sqrt{1-x^2} =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(2)
$$f(x) = \sqrt[4]{x^2+1}$$
$$= (x^2+1)^{\frac{1}{4}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)^{-\frac{3}{4}}\frac{d}{dx}(x^2+1)$$
$$= \frac{1}{4}(x^2+1)^{-\frac{3}{4}}(2x)$$
$$= \frac{1}{2}x(x^2+1)^{-\frac{3}{4}}$$
$$f''(x) = \frac{1}{2}\left[x\frac{d}{dx}(x^2+1)^{-\frac{3}{4}}+(x^2+1)^{-\frac{3}{4}}\frac{d}{dx}(x)\right]$$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

4. กำหนด $f(x) = (x+1)^5$ จงหา $f^{(4)}(x)$

วิธีทำ $f(x) = (x+1)^5$

$f'(x) =$ ....

$f''(x) =$ ....

$f'''(x) =$ ....

$f^{(4)}(x) =$ ....

5. ปล่อยวัตถุจากที่สูงลงสู่พื้น วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $s = 8t^2$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหา

(1) ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้หลังจากปล่อยวัตถุไป 3 วินาที

วิธีทำ จาก $s = 8t^2$

เมื่อ $t = 3$; $s =$ ....

$=$ ....

ดังนั้น หลังจากปล่อยวัตถุไป 3 วินาที วัตถุเคลื่อนที่ได้ .... เมตร

(2) ความเร็วขณะวินาทีที่ 2

วิธีทำ ความเร็ว (v) ขณะเวลา t ใด ๆ คือ $\frac{ds}{dt}$

$v = \frac{d}{dt}(8t^2)$

$=$ ....

ดังนั้น ความเร็วขณะวินาทีที่ 2 เท่ากับ .... เมตรต่อวินาที

(3) ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ

วิธีทำ ความเร่ง (a) ขณะเวลา t ใด ๆ คือ $\frac{dv}{dt}$ หรือ $\frac{d^2s}{dt^2}$

จะได้ $a =$ ....

$=$ ....

ดังนั้น ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ เท่ากับ .... เมตรต่อ(วินาที)^2

(4) ความเร่งขณะวินาทีที่ 6

วิธีทำ ความเร่งขณะวินาทีที่ 6 เท่ากับ ....

6. โยนวัตถุขึ้นไปในอากาศ วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $s = 160t - 16t^2$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหา

(1) ความเร็วเฉลี่ยในช่วงวินาทีที่ 2 วินาที ถึงวินาทีที่ 3

วิธีทำ ความเร็วเฉลี่ยในช่วงวินาทีที่ t วินาที ถึงวินาทีที่ t+h คือ

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{[160(t+h)-16(t+h)^2]-(160t-16t^2)}{h}$$

= ....

= ....

ดังนั้น ความเร็วเฉลี่ยในช่วงวินาทีที่ 2 วินาที ถึงวินาทีที่ 3 เท่ากับ

....

ข้อสังเกต

ความเร็วเฉลี่ยในช่วงวินาทีที่ 2 วินาที ถึงวินาทีที่ 3

เท่ากับ $$\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{[160(3)-16(3)^2]-[160(2)-16(2)^2]}{1}$$

= ....

= ....

(2) ความเร็วขณะวินาทีที่ 5

วิธีทำ ความเร็ว (v) ขณะเวลา t ใด ๆ คือ $\frac{ds}{dt}$

v = ...

= ....

ดังนั้น ความเร็วขณะวินาทีที่ 5 เท่ากับ .... เมตรต่อวินาที

(3) ความเร่งขณะวินาทีที่ 6

วิธีทำ ความเร่ง (a) ขณะเวลา t ใด ๆ คือ $\frac{dv}{dt}$ หรือ $\frac{d^2s}{dt^2}$

จะได้ a = ...

= ....

ดังนั้น ความเร่งขณะวินาทีที่ 6 เท่ากับ .... เมตรต่อ(วินาที)^2

7. วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นตรงได้ระยะทาง $s = t(t-3)^2$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหา
   (1) ความเร็วของวัตถุหลังจากเคลื่อนที่ไปได้ 2 วินาที
   (2) วัตถุหยุดนิ่งชั่วขณะเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที
   (3) ความเร่งของวัตถุขณะวินาทีที่ 4

วิธีทำ (1)

$$s = t(t-3)^2$$
$$= t(t^2-6t+9)$$
$$= t^3-6t^2+9t$$
$$v = \frac{d}{dt}(t^3-6t^2+9t)$$
$$= \text{..............................}$$
$$v(2) = \text{..............................}$$
$$= \text{..............................}$$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุหลังจากเคลื่อนที่ไปได้ 2 วินาที เท่ากับ

(2) วัตถุหยุดนิ่งชั่วขณะเมื่อความเร็วเท่ากับ ....

จะได้ $3t^2-12t+9 = 0$

....

....

....

....

ดังนั้น วัตถุหยุดนิ่งชั่วขณะเมื่อเวลาผ่านไป ....

(3) ความเร่ง (a) ขณะเวลา t ใด ๆ คือ $\frac{dv}{dt}$ หรือ $\frac{d^2s}{dt^2}$

$$a = \text{..............................}$$
$$= \text{..............................}$$

ดังนั้น ความเร่งของวัตถุขณะวินาทีที่ 4 เท่ากับ ....

8. ในการโยนลูกบอลตรงขึ้นไปในอากาศจากยอดตึกสูง 34.3 เมตร มีสมการของการเคลื่อนที่เป็น $s = 29.4t - 4.9t^2$ เมตร เมื่อ s เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร และ t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหา
   (1) ลูกบอลขึ้นไปสูงสุดจากพื้นดินกี่เมตร
   (2) ขณะที่ลูกบอลตกกระทบยอดตึกมีความเร็วเท่าไร
   (3) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของระยะทางเทียบกับเวลาในช่วงวินาทีที่ 2 ถึงวินาทีที่ 3 เป็นเท่าไร

วิธีทำ จากสมการของการเคลื่อนที่ $s = 29.4t - 4.9t^2$

(1) ลูกบอลขึ้นไปสูงสุดเมื่อความเร็วเท่ากับ ....

ความเร็วของลูกบอล $v = \frac{d}{dt}(29.4t - 4.9t^2)$

จะได้ $v =$ ....

หา t เมื่อ v = ...; ....

....

ลูกบอลขึ้นไปสูงสุดในวินาทีที่ ....

ระยะทางที่ลูกบอลขึ้นไปสูงสุดจากยอดตึกเท่ากับ ....

....

ดังนั้น ลูกบอลขึ้นไปสูงสุดจากพื้นดินเท่ากับ ....

....

(2) ลูกบอลตกถึงพื้นมีความเร็วขณะเวลา t = ... วินาที

ดังนั้น ลูกบอลตกกระทบยอดตึกด้วยความเร็ว

(3) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ s เทียบกับ t ในช่วง $t = 2$ ถึง $t = 3$

เท่ากับ $\frac{s(3)-s(2)}{3-2} =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

2.8 การประยุกต์ของอนุพันธ์

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถนำอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง
4. การให้เหตุผล
5. การคิดสร้างสรรค์

2.8.1 การเคลื่อนที่แนวตรง

การเคลื่อนที่ของวัตถุสามารถใช้ฟังก์ชัน $y = s(t)$ โดยที่ $s(t)$ คือตำแหน่งของวัตถุ ณ ขณะเวลาใด ๆ ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ s เทียบกับ t ขณะเวลาใด ๆ ความเร็ว v เป็นอนุพันธ์ของ s เทียบกับ t จะได้ v เป็นฟังก์ชันของเวลา t เมื่อ $v(t) = s'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}$

ในทำนองเดียวกัน ความเร่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว v เทียบกับ t ขณะเวลา t ความเร่ง a เป็นอนุพันธ์ของ v เทียบกับ t นั่นคือ $a(t) = v'(t) = s''(t)$

ข้อสังเกต

ความเร่ง คือ อนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชันความเร็ว v และเป็นอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชันแสดงตำแหน่ง s

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $s(t) = t^2+2t$ เป็นฟังก์ชันแสดงตำแหน่งของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวราบ (มีหน่วยเป็นเมตร) ขณะเวลา t วินาที จงหา

(1) ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้นขณะเวลา 12 วินาที

(2) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา 12 วินาที

(3) ความเร่งของวัตถุขณะเวลา 12 วินาที

วิธีทำ จาก $s(t) = t^2+2t$ จะได้ $v(t) = s'(t) = 2t+2$

และ $a(t) = v'(t) = 2$

(1) ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้นขณะเวลา 12 วินาที

เท่ากับ $|s(12)-s(0)| = |(12^2+2(12))-(0^2+2(0))| = 168$ เมตร

(2) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา 12 วินาที คือ $v(12)$

$v(12) = 2(12)+2 = 26$ เมตรต่อวินาที

(3) ความเร่งของวัตถุขณะเวลา 12 วินาที คือ $a(12)$

$a(12) = 2$ เมตรต่อวินาที^{2}

ตอบ

ข้อสังเกต

ขณะเวลา 12 วินาที ความเร็วและความเร่งของวัตถุเป็นจำนวนจริงบวกแสดงว่าวัตถุกำลังเคลื่อนที่ไปทางขวาและมีความเร็วเพิ่มขึ้น

ตัวอย่างที่ 2 ชัยพลโยนวัตถุขึ้นไปในแนวดิ่ง ถ้าตำแหน่งของวัตถุ (มีหน่วยเป็นเมตร) หลังจากโยนวัตถุขึ้นไปแล้ว t วินาที หาได้จาก $s(t) = 12t-t^2$ จงหา

(1) ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้นหลังจากโยนไปแล้ว 3 วินาที

(2) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา 3 วินาที

(3) ความเร่งของวัตถุขณะเวลา 3 วินาที

วิธีทำ จาก $s(t) = 12t-t^2$ จะได้ $v(t) = s'(t) = 12-2t$

และ $a(t) = v'(t) = -2$

(1) ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้นหลังจากโยนไปแล้ว 3 วินาที

เท่ากับ $|s(3)-s(0)| = |(12(3)-3^2)-(12(0)-0^2)| = 27$ เมตร

(2) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา 3 วินาที คือ $v(3)$

$v(3) = 12-2(3) = 6$ เมตรต่อวินาที

(3) ความเร่งของวัตถุขณะเวลา 3 วินาที คือ $a(3)$

$a(3) = -2$ เมตรต่อวินาที^{2}

ตอบ

ข้อสังเกต

ขณะเวลา 3 วินาที ความเร็วของวัตถุเป็นจำนวนจริงบวกแต่ความเร่งของวัตถุเป็นจำนวนจริงลบแสดงว่าวัตถุกำลังเคลื่อนที่ขึ้นแต่มีความเร็วลดลง โดยเคลื่อนที่ยังไม่ถึงจุดที่วัตถุขึ้นไปสูงสุด

แบบฝึกหัดที่ 2.8.1

1. โยนลูกบอลขึ้นไปในแนวดิ่ง ถ้าตำแหน่งของวัตถุ (มีหน่วยเป็นเมตร) หลังจากโยนวัตถุขึ้นไปแล้ว t วินาที หาได้จาก $s(t) = 64t-8t^2$ จงหา
   (1) ระยะห่างของลูกบอลจากตำแหน่งเริ่มต้นหลังจากโยนไปแล้ว 2 วินาที
   (2) ความเร็วของลูกบอลขณะเวลา 4 วินาที
   (3) ความเร่งของลูกบอลขณะเวลา 5 วินาที
   (4) ลูกบอลขึ้นไปสูงสุดกี่เมตร
   (5) ลูกบอลตกลงถึงตำแหน่งเริ่มต้นเมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าไร

วิธีทำ จาก $s(t) = 64t-8t^2$ จะได้ $v(t) =$ ....

และ $a(t) =$ ....

(1) ระยะห่างของลูกบอลจากตำแหน่งเริ่มต้นหลังจากโยนลูกบอลไปแล้ว 2 วินาที

เท่ากับ ....

(2) ความเร็วของลูกบอลขณะเวลา 4 วินาที คือ $v(4)$

$v(4) =$ ....

(3) ความเร่งของลูกบอลขณะเวลา 5 วินาที คือ $a(5)$

$a(5) =$ ....

(4) ลูกบอลขึ้นไปสูงสุดเมื่อ $v(t) = 0$ นั่นคือ $t =$ ....

$s(4) =$ ....

(5) ลูกบอลตกลงถึงตำแหน่งเริ่มต้นเมื่อ $s(t) = 0$

....

....

....

....

ดังนั้น ลูกบอลตกลงถึงตำแหน่งเริ่มต้นเมื่อเวลาผ่านไปนาน .... วินาที

2. วัตถุ P เคลื่อนที่ในแนวตรง ระยะทาง s เมตรจากจุดเริ่มต้น กำหนดด้วยสมการ $s(t) = t(t-3)^2$ ขณะเวลา t วินาที จงหา

(1) ความเร็วของวัตถุ P ขณะเวลา 2 วินาที

(2) วัตถุ P หยุดนิ่งชั่วขณะเวลาใด

(3) ความเร่งของวัตถุ P ขณะเวลา 4 วินาที

วิธีทำ จาก $s(t) = t(t-3)^2 =$ ....

$v(t) = s'(t) =$ ....

$a(t) = v'(t) =$ ....

(1) ความเร็วของวัตถุ P ขณะเวลา 2 วินาที คือ $v(2)$

$v(2) =$ ....

(2) วัตถุ P หยุดนิ่งชั่วขณะ $v(t) = 0$

....

....

....

....

....

(3) ความเร่งของวัตถุ P ขณะเวลา 4 วินาที คือ $a(4)$

....

3. ให้ $s(t) = t^3-3t^2+3t+2$ เป็นฟังก์ชันแสดงตำแหน่งของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวราบ (มีหน่วยเป็นเมตร) ขณะเวลา t วินาที จงหา

(1) ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้นขณะ $t = 2$

(2) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา $t = 2$

(3) ความเร่งของวัตถุขณะเวลา $t = 2$

(4) เวลา t ที่วัตถุเริ่มวกกลับมาที่ตำแหน่งเริ่มต้น

วิธีทำ ....

....

....

....

....

4. สมชายปล่อยวัตถุจากบนตึกสูงลงสู่พื้นดิน ถ้าตำแหน่งของวัตถุ (มีหน่วยเป็นเมตร) หลังจากปล่อยวัตถุแล้ว t วินาที หาได้จากสมการ $s(t) = 48t - 6t^2$ จงหา

(1) ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้นหลังจากปล่อยวัตถุไปแล้ว 3 วินาที

(2) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา 3 วินาที

(3) ความเร่งของวัตถุขณะเวลา 3 วินาที

(4) วัตถุตกลงกระทบพื้นขณะเวลาใด

วิธีทำ

2.8.2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

การพิจารณาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของฟังก์ชันโดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ R ไป R และ A เป็นสับเซตของ D_f

f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม**บน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x_1 และ x_2 ใดๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

f เป็น**ฟังก์ชันลด**บน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x_1 และ x_2 ใดๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

ทฤษฎีบท 7

ให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในช่วง $A \subset D_f$

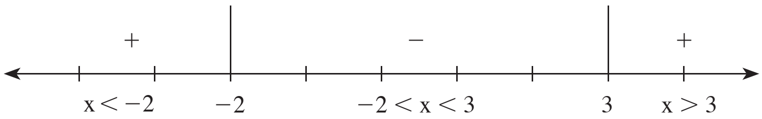
1. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็น**ฟังก์ชันลด (decreasing function)** บนช่วง A
2. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function)** บนช่วง A

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = 2x^3-3x^2-36x$ จงตรวจสอบว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใด และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใด

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3-3x^2-36x \\ f'(x) &= 6x^2-6x-36 \\ &= 6(x^2-x-6) \\ &= 6(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

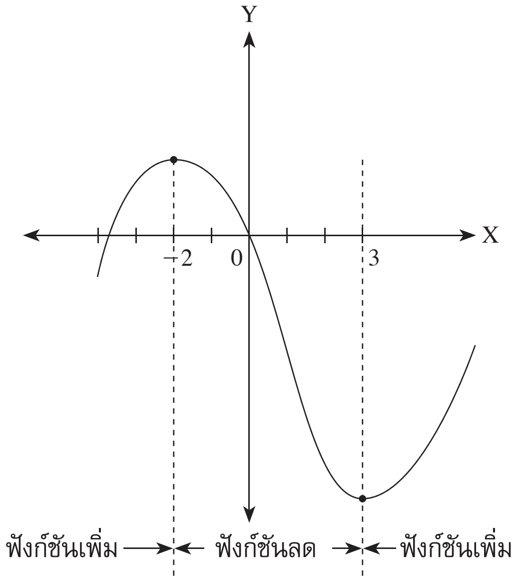
ตรวจสอบค่าของ $f'(x)$



$f'(x) > 0$ บนช่วง $(-\infty, -2)$ และ $(3, \infty)$

$f'(x) < 0$ บนช่วง $(-2, 3)$

กราฟอ้างอิง



บทนิยาม

ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f(c) \geqslant f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b) เรียก f(c) ว่า**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum)** ของฟังก์ชัน f และเรียก (c, f(c)) ว่า**จุดสูงสุดสัมพัทธ์**

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f(c) \leqslant f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b) เรียก f(c) ว่า**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum)** ของฟังก์ชัน f และเรียก (c, f(c)) ว่าจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ทฤษฎีบท 8

ให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f'(c)$ หาค่าได้ ถ้า f(c) เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f จะได้ว่า $f'(c) = 0$

บทนิยาม

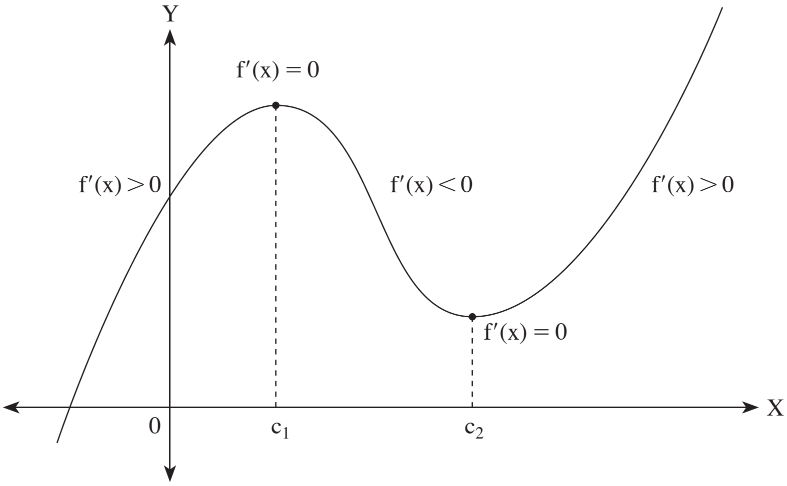
ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) ค่าของ $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = 0$ จะเรียกว่า **ค่าวิกฤต (critical values)** ของฟังก์ชัน f

ทฤษฎีบท 9

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) ค่าของ $c \in (a, b)$ เป็นค่าวิกฤตของ f

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นรอบ ๆ c แล้ว $f(c)$ เป็น **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์**

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นรอบ ๆ c แล้ว $f(c)$ เป็น **ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์**

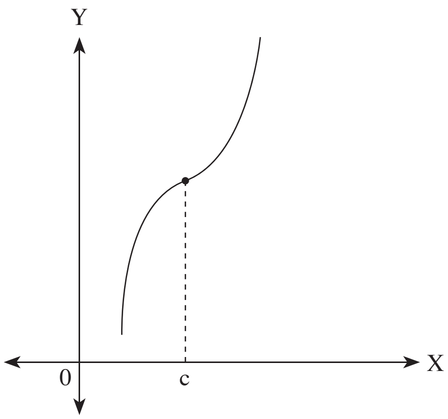


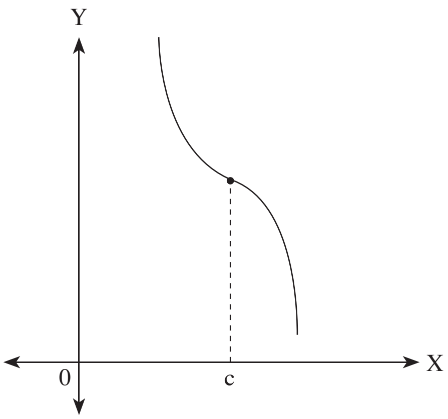
c_1 และ c_2 เป็นค่าวิกฤต

$f(c_1)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

$f(c_2)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ถ้าค่าของ $f'(x)$ ไม่มีการเปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบ หรือไม่มีการเปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก แสดงว่า c เป็นค่าวิกฤตที่ไม่ได้ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์





ทฤษฎีบท 10

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง A ใด ๆ และ c เป็นค่าวิกฤตของ f ซึ่ง $f'(x) = 0$

1. ถ้า $f''(x) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
2. ถ้า $f''(x) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = 2x^3-3x^2-36x$ จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f

วิธีทำ จาก

$$f(x) = 2x^3-3x^2-36x$$
$$f'(x) = 6x^2-6x-36$$
$$= 6(x^2-x-6)$$
$$= 6(x+2)(x-3)$$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $6(x+2)(x-3) = 0$

$x + 2 = 0$ หรือ $x-3 = 0$

$x = -2$ หรือ $x = 3$

$$f''(x) = 12x-6$$
$$f''(-2) = 12(-2)-6 = -30 < 0$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ $f(-2) = 2(-2)^3-3(-2)^2-36(-2) = 44$

$$f''(3) = 12(3)-6 = 30 > 0$$

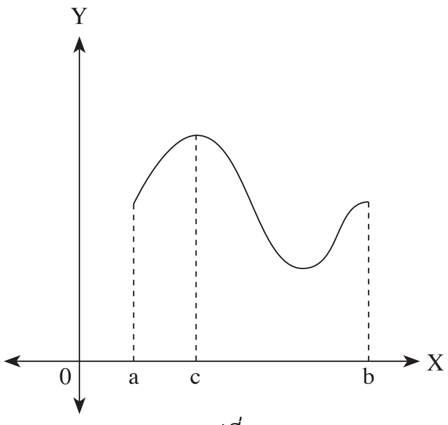
ดังนั้น ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ $f(3) = 2(3)^3-3(3)^2-36(3) = -81$

บทนิยาม

ฟังก์ชัน f มี**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์**ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของฟังก์ชัน f

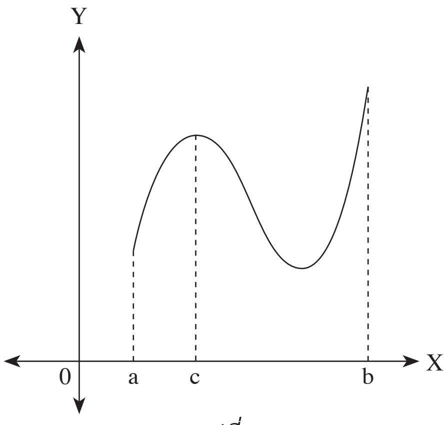
ฟังก์ชัน f มี**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์**ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของฟังก์ชัน f

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยที่ $D_f = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$



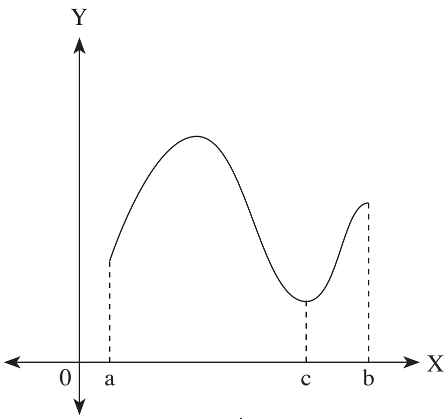
รูปที่ 1

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$
$f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ค่าหนึ่ง
ของฟังก์ชัน f



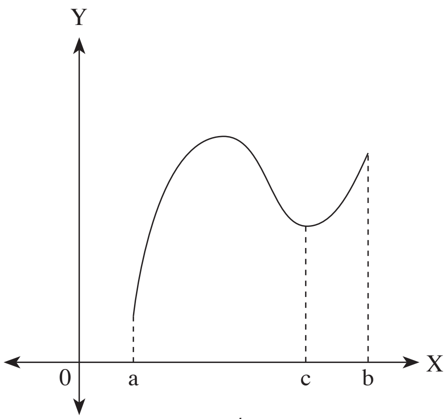
รูปที่ 2

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = b$
$f(b)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ค่าหนึ่ง
ของฟังก์ชัน f



รูปที่ 3

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$
$f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ค่าหนึ่ง
ของฟังก์ชัน f



รูปที่ 4

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = a$
$f(a)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ค่าหนึ่ง
ของฟังก์ชัน f

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f เมื่อ $f(x) = x^3-12x+5$ บนช่วงปิด $[0, 3]$

วิธีทำ จาก

$$f(x) = x^3-12x+5$$
$$f'(x) = 3x^2-12$$
$$= 3(x^2-4)$$
$$= 3(x-2)(x+2)$$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ $3(x-2)(x+2) = 0$

$x-2 = 0$ หรือ $x+2 = 0$

$x = 2$ หรือ $x = -2$

แต่ $-2 \notin [0, 3]$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วง $[0, 3]$ คือ 2

คำนวณหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ $x = 2$ และที่จุดปลายช่วง $[0, 3]$ คือ $x = 0$ และ $x = 3$

$$f(2) = 2^3-12(2)+5 = -11$$
$$f(0) = 0^3-12(0)+5 = 5$$
$$f(3) = 3^3-12(3)+5 = -4$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันคือ 5

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันคือ -11 **ตอบ**

แบบฝึกหัดที่ 2.8.2

1. จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้แต่ละข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มและเป็นฟังก์ชันลด

(1) $f(x) = x^2-2x-8$

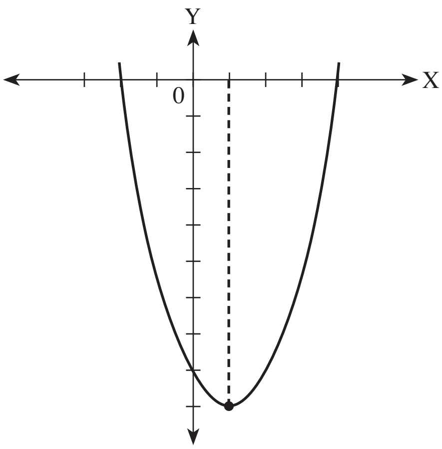
$f'(x) = 2x-2$

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชัน เมื่อ $f'(x) = 0$

$2x-2 = 0$

$x =$ ....

ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ ....



f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง ....

f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง ....

(2) $f(x) = 5+4x-x^2$

$f'(x) =$ ....

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชัน เมื่อ $f'(x) = 0$

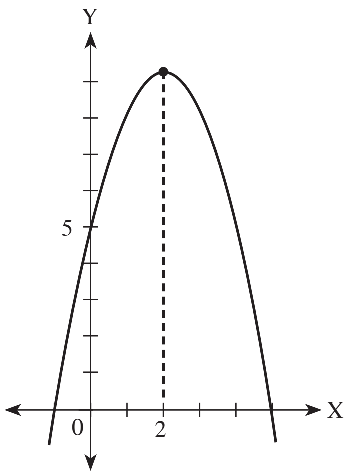
....

$x =$ ....

ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ ....

....

....



f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง ....

f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง ....

(3) $f(x) = x^3-6x^2+9x+3$

$f'(x) =$ ....

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชัน เมื่อ $f'(x) =$ ....

....

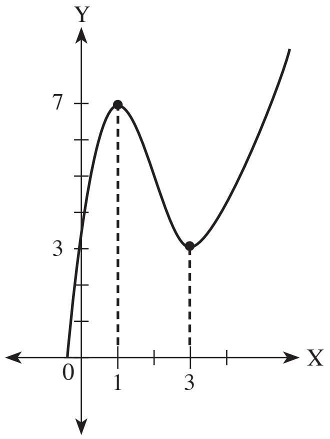
....

....

....

....

ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ ....



f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง ....

f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง ....

2. จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน พร้อมทั้งเขียนกราฟ

(1) $f(x) = x^4+4x^3-5$

$f'(x) = $ ....

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชัน เมื่อ ....

....

....

....

....

$f(0) = 0^4+4(0)^3-5 = $ ....

$f(.......) = $ ....

$f''(x) = $ ....

$f''(.......) = $ ....

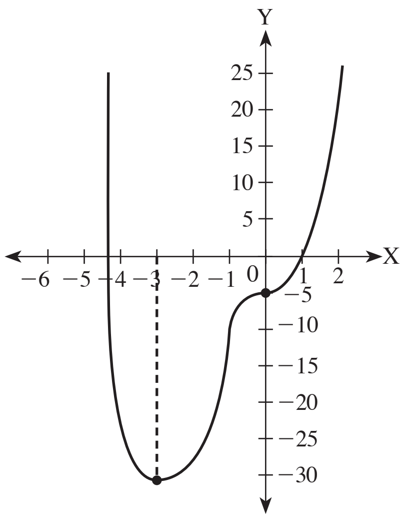
$f''(.......) = $ ....

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

....

เขียนกราฟได้ดังนี้



(2) $f(x) = x^4-2x^2+10$

$f'(x) = $ ....

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชันเมื่อ ....

....

....

....

....

....

....

....

$f(.......) = $ ....

$f(.......) = $ ....

$f(.......) = $ ....

$f''(x) = $ ....

$f''(.......) = $ ....

$f''(.......) = $ ....

$f''(.......) = $ ....

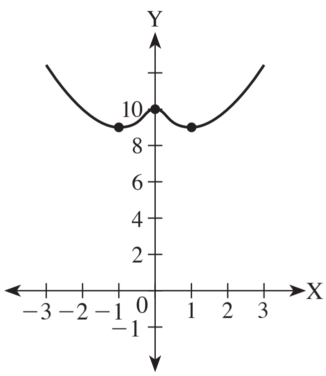
ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

....

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

....

เขียนกราฟได้ดังนี้



(3) $f(x) = x(x-2)^2$

$f'(x) = $ ....

$= $ ....

$f''(x) = $ ....

$= $ ....

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชันเมื่อ ....

....

....

....

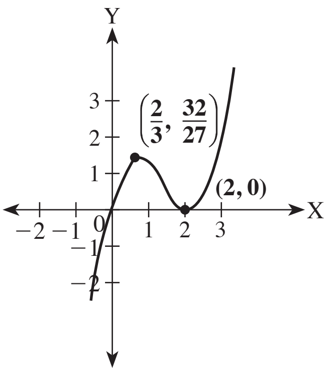
$f''\left(\frac{2}{3}\right) = $ .... $f\left(\frac{2}{3}\right) = $ ....

$f''(.......) = $ .... $f(2) = $ ....

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

ค่าต่ำสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

เขียนกราฟได้ดังนี้



(4) $f(x) = x^3-2x^2-4x+3$

$f'(x) = 3x^2-4x-4$

$f''(x) = 6x-4$

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชันเมื่อ ....

....

....

....

....

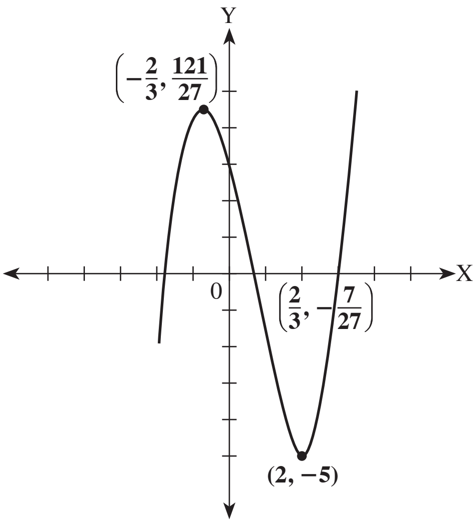
$f''\left(-\frac{2}{3}\right)$ = ... $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ = ...

$f''(2)$ = ... $f(2)$ = ...

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

เขียนกราฟได้ดังนี้



(5) $f(x) = (x^2-1)^3$

$= (x^2)^3 - 3(x^2)^2 + 3x^2 - 1^3$

$= x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

$f'(x) =$ ....

$f''(x) =$ ....

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชันเมื่อ ....

....

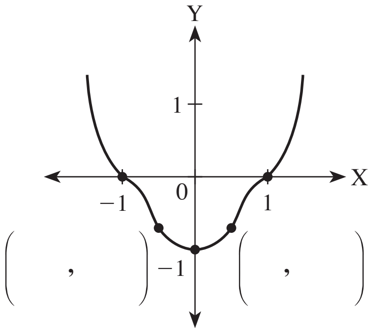
....

....

....

....

....



$f''(0) =$ ....

$f''(1) =$ ....

$f''(-1) =$ ....

$f(0) =$ ....

$f(1) =$ ....

$f''(-1) =$ ....

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

หมายเหตุ

จุดเปลี่ยนความเว้า คือ จุดที่เชื่อมระหว่างเส้นโค้งเว้าขึ้นกับเส้นโค้งเว้าลง หรือในทางกลับกัน ถ้าจุด $(c, f(c))$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า แล้ว $f''(c) = 0$ หรือ $f''(c)$ หาค่าไม่ได้

ในข้อ (4) จากกราฟจะพบว่าจุดเปลี่ยนความเว้า ได้แก่

3. จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้แต่ละข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มและเป็นฟังก์ชันลด พร้อมทั้งบอกค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

(1) $f(x) = x^2-6x+9$

$f'(x) = $ ....

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชันเมื่อ $f'(x) = 0$

.... =

$x = $ ....

ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ ....

$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
3	

$f''(x) = $ ....

$f''(\ldots\ldots) = $ ....

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x = ...

และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ f(3)

$f(3) = $ ....

= ....

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง ....

f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง ....

(2) $f(x) = 4+24x+3x^2-x^3$

$f'(x) = $ ....

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชันเมื่อ $f'(x) = $ ....

....

....

....

....

....

ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ ....

$f'(x)$..............	$f'(x)$..............	$f'(x)$..............
	....	....

$f''(x) = $ ....

$f''(\ldots\ldots) = $ ....

$f''(\ldots\ldots) = $ ....

f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ x = ...

และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ ....

$f(\ldots\ldots) = $ ....

= ....

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x = ...

และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ ....

$f(\ldots\ldots) = $ ....

= ....

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (.........)...

f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง

....

4. จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x) = x^2 - 4x - 8$

$f'(x) =$ ....

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชันเมื่อ $f'(x) = 0$

....

....

ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ ....

$f(2) =$ ....

$=$ ....

$f''(x) =$ ....

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

(2) $f(x) = 5 - 6x - x^2$

$f'(x) =$ ....

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชันเมื่อ $f'(x) =$ ....

....

....

ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ ....

$f(\ldots\ldots) =$ ....

$=$ ....

$f''(x) =$ ....

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

(3) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 4$

$f'(x) =$ ....

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชันเมื่อ $f'(x) =$ ....

....

....

....

....

....

ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ ....

$f(-4) = (-4)^3 + 3(-4)^2 - 24(-4) + 4$

$=$ ....

$f(2) = 2^3 + 3(2)^2 - 24(2) + 4$

$=$ ....

$f''(x) =$ ....

$f''(-4) =$ ....

$f''(2) =$ ....

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

(4) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$

$f'(x) =$ ....

หาค่าวิกฤตของฟังก์ชันเมื่อ

....

....

....

....

....

ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ ....

$f(\ldots\ldots) =$ ....

$=$ ....

$f(\ldots\ldots) =$ ....

$=$ ....

$f''(x) =$ ....

$f''(\ldots\ldots) =$ ....

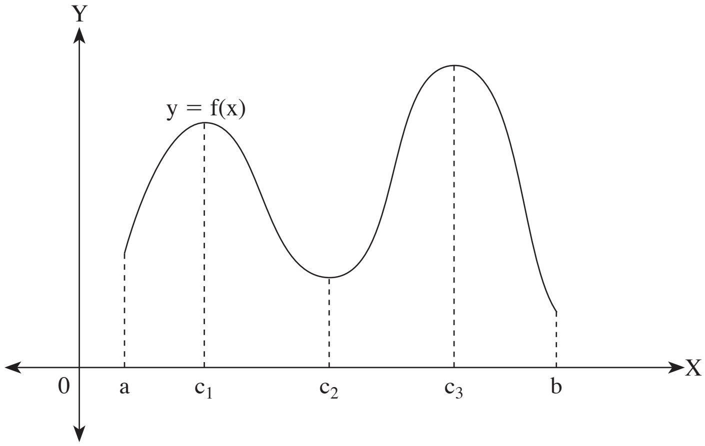
$f''(\ldots\ldots) =$ ....

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ....

5. จงพิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เมื่อ $D_f = \{x | a \leq x \leq b\}$

(1)



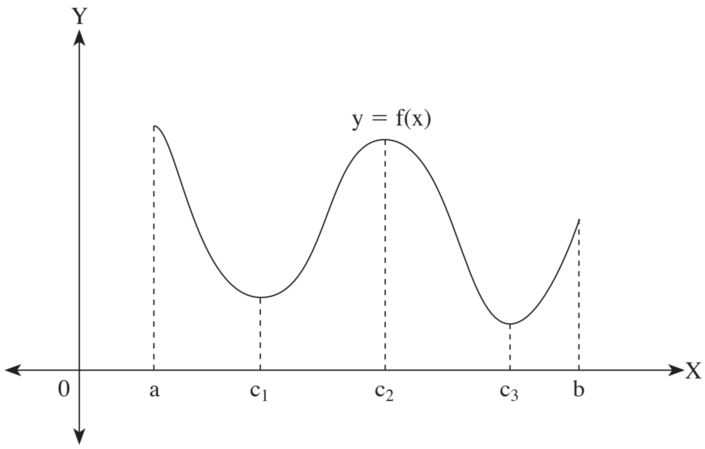
ฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x =$ ....

มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x =$ ....

มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x =$ ....

มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x =$ ....

(2)



ฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x =$ ....

และค่าสูงสุดสัมบูรณ์เท่ากับ ....

ฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x =$ ....

และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เท่ากับ ....

6. จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x) = x^2-x-6$ บนช่วง $[0, 2]$

$f'(x) = 2x-1$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ $2x-1 = 0$

$x =$ ....

ดังนั้น ค่าวิกฤตบนช่วงปิด $[0, 2]$ คือ ....

คำนวณค่าของฟังก์ชันที่ $x =$ .... และจุดปลายช่วง $[0, 2]$ คือ $x =$ .... และ $x =$ ....

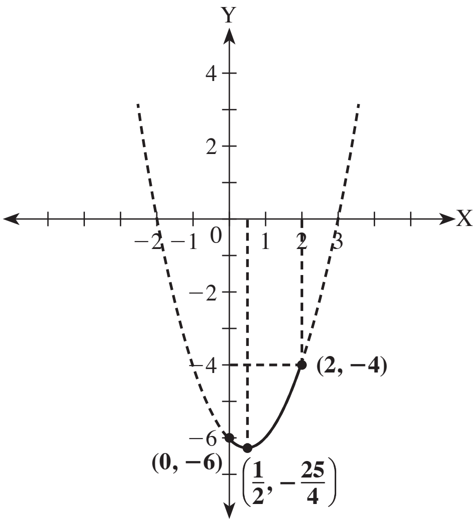
$f\left(\frac{1}{2}\right) =$ ....

$f(0) =$ ....

$f(2) =$ ....

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันคือ ....

และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันคือ ....



ข้อสังเกต

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันเท่ากับค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

(2) $f(x) = 8+2x-x^2$ บนช่วง $[-1, 2]$

$f'(x) =$ ....

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ ....

....

ดังนั้น ค่าวิกฤตบนช่วงปิด $[0, 2]$ คือ ....

คำนวณค่าของฟังก์ชันที่ $x = 1$ และจุดปลายช่วง $[-1, 2]$

คือ $x =$ .... และ $x =$ ....

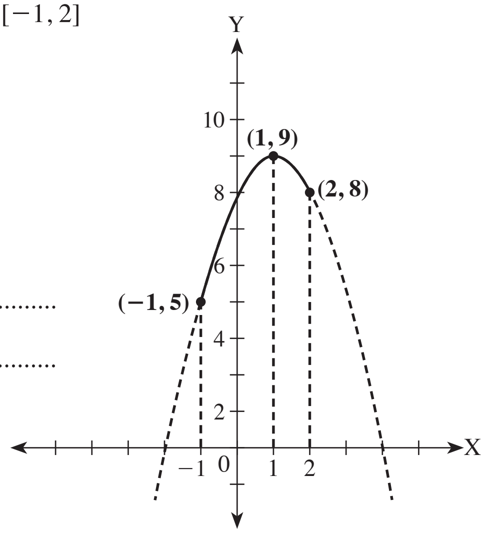
....

....

....

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันคือ ....

และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันคือ ....



ข้อสังเกต

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันเท่ากับ ....

(3) $f(x) = x^3-6x^2-15x+24$ บนช่วง $[-2, 6]$

$f'(x) = 3x^2-12x-15$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ ....

....

....

....

....

ดังนั้น ค่าวิกฤตบนช่วงปิด $[-2, 6]$ คือ ....

คำนวณค่าของฟังก์ชันที่ $x =$ ...., $x =$ .... และจุดปลายช่วง $[-2, 6]$ คือ

$x =$ .... และ $x =$ ....

....

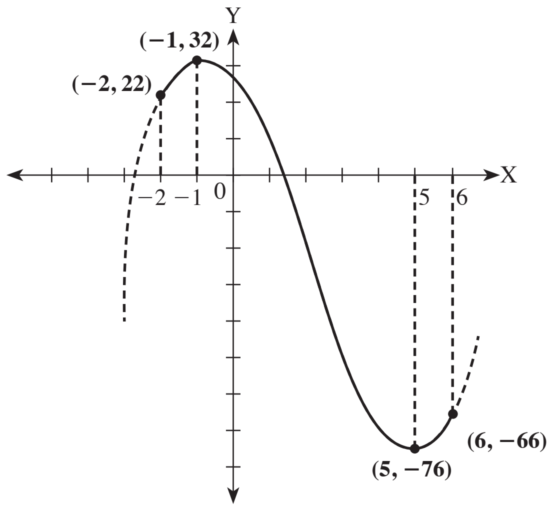
....

....

....

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันคือ ....

และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันคือ ....



2.8.3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

หลักเกณฑ์ทั่วไปในการแก้โจทย์ปัญหามีขั้นตอนดังนี้

1. พิจารณาว่าโจทย์ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
2. กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ จากโจทย์
3. หาค่า $\frac{dy}{dx}$
4. ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ แล้วแก้สมการหาค่าวิกฤต
5. นำค่าวิกฤตในข้อ 4 มาตรวจสอบว่าทำให้ y มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดหรือไม่

แบบฝึกหัดที่ 2.8.3

1. ถ้าแปดเท่าของจำนวนจริงจำนวนหนึ่งลบด้วยกำลังสองของจำนวนจริงนั้นทำให้ผลต่างมีค่ามากที่สุด จงหาจำนวนจริงนั้น

วิธีทำ ให้จำนวนจริงนั้นเป็น x

และ y เท่ากับแปดเท่าของ x ลบด้วย x^2

จะได้ y = ...

$\frac{dy}{dx}$ = ...

ถ้า $\frac{dy}{dx} = 0$ จะได้ ....

....

ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ ....

$\frac{d^2y}{dx^2}$ = ...

นั่นคือ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x =$ .... เท่ากับ ....

ดังนั้น จำนวนจริงนั้นคือ ....

2. ผลคูณของจำนวนจริงสองจำนวนเป็น -25 ถ้าผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนมีค่าน้อยที่สุด จงหาจำนวนทั้งสอง

วิธีทำ ให้จำนวนจริงจำนวนหนึ่งเป็น x

ผลคูณของจำนวนจริงทั้งสองเป็น -25

จะได้ จำนวนจริงอีกจำนวนคือ ....

ให้ y เป็นผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวน

จะได้ $y = x^2+\left(-\frac{25}{x}\right)^2$

= ....

$\frac{dy}{dx}$ = ...

ถ้า $\frac{dy}{dx} = 0$ จะได้ $2x-1{,}250x^{-3}$ = ...

.... = ...

.... = ...

.... = ...

.... = ...

.... = ...

.... หรือ ....

จะได้ $x =$ .... หรือ $x =$ ....

$\frac{d^2y}{dx^2}$ = ...

= ....

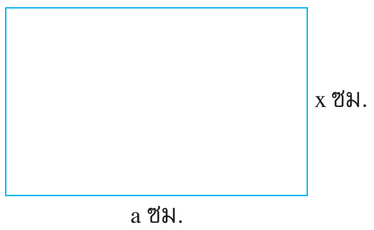
ที่ $x = 5;$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2+$ .... = ...

ที่ $x = -5;$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2+$ .... = ...

....

3. มีลวดยาว 100 เซนติเมตร นำมาดัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้มีพื้นที่มากที่สุด จะต้องดัดให้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความกว้างและความยาวเท่าไร

วิธีทำ ให้ดัดลวดเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากดังรูป



ให้ด้านกว้างยาว x เซนติเมตร
ด้านยาวยาว a เซนติเมตร
เส้นรอบรูปยาว 100 เซนติเมตร

$2(x+a) = 100$

$x+a =$ ....

$a =$ ....

ให้พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเท่ากับ $A = xa$

แทนค่า a จะได้ $A =$ ....

$A' =$ ....

ถ้า $A' = 0$ จะได้ $50-2x =$ ....

$x =$ ....

ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ..

$A'' =$ ....

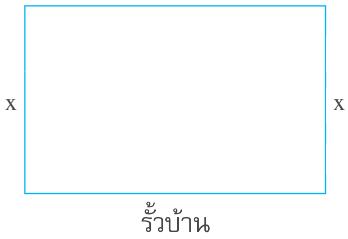
A มีค่ามากที่สุดเมื่อ $x =$ ....

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง .... เซนติเมตร และยาว .... เซนติเมตร

เมื่อกำหนดความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
รูปสี่เหลี่ยมนั้นจะมีพื้นที่มากที่สุดเมื่อรูปสี่เหลี่ยมนั้น
เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

4. บุญมีต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินแปลงหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยมีรั้วบ้านเป็นรั้วด้านหนึ่งของที่ดินแปลงนี้ ถ้ามีรั้วยาว 400 เมตร และต้องการปลูกส้มในที่ดินแปลงนี้โดยใช้พื้นที่ทุก ๆ 5 ตารางเมตรต่อต้นส้ม 1 ต้น จะปลูกส้มได้มากที่สุดกี่ต้น

วิธีทำ



ให้ที่ดินแปลงนี้กว้าง x เมตร
ที่ดินแปลงนี้ยาว $400-2x$ เมตร
ให้ A แทนพื้นที่ที่ล้อมรั้ว

A = ...

= ....

....

....

....

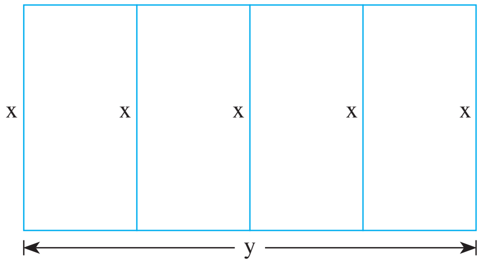
....

....

....

5. ชายคนหนึ่งมีไม้ไว้ทำรั้วยาว 80 เมตร ต้องการล้อมบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าพร้อมทั้งกั้นเป็น 4 ช่อง เท่า ๆ กัน ดังรูป จงหาพื้นที่มากที่สุดที่เขาจะล้อมรั้วได้

วิธีทำ



ให้ด้านกว้างของบริเวณรูปสี่เหลี่ยมเท่ากับ x เมตร

ด้านยาวของบริเวณเท่ากับ y เมตร

จากโจทย์ มีไม้กั้นรั้วยาว 80 เมตร

จากรูป จะได้ $5x+2y = 80$

$y =$ ....

ให้ A เป็นพื้นที่บริเวณที่ล้อมรั้ว

จะได้ $A = xy$

$A =$ ....

....

....

....

....

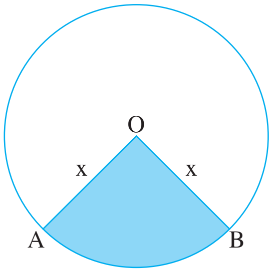
....

....

....

6. ในการสร้างรูปสามเหลี่ยมฐานโค้งซึ่งเป็นเซกเตอร์ของวงกลมให้มีความยาวรอบรูปเท่ากับ 20 เซนติเมตร พื้นที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้งนี้เกิดขึ้นเมื่อรัศมีของวงกลมยาวเท่าไร

วิธีทำ



ให้ AOB เป็นรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง

ให้ OA = OB = x เซนติเมตร

ฐานส่วนโค้ง AB ยาว .... เซนติเมตร

ความยาวเส้นรอบวง .... เซนติเมตร

$$\frac{\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง AOB}}{\text{พื้นที่วงกลม}} = \frac{\text{ความยาวส่วนโค้ง AB}}{\text{ความยาวเส้นรอบวงของวงกลม}}$$

ให้ $\frac{A}{\pi x^2}$ = ...

A = ...

A = ...

$\frac{dA}{dx}$ = ...

....

....

ดังนั้น พื้นที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้งนี้เกิดขึ้นเมื่อรัศมีของวงกลมยาว

7. ค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งจำนวน x ชิ้นต่อวัน เท่ากับ $\frac{1}{4}x^2+35x+25$ บาท ถ้าขายชิ้นละ $50-\frac{x}{2}$ บาท จะต้องผลิตสินค้าชนิดนี้วันละกี่ชิ้นจึงจะทำให้ได้กำไรมากที่สุด

วิธีทำ จากโจทย์กำหนด ค่าใช้จ่ายของโรงงานในการผลิตสินค้า $\frac{1}{4}x^2+35x+25$ บาท

แสดงว่าต้นทุนการผลิตสินค้าวันละ .... บาท

ขายสินค้าชิ้นละ $50-\frac{x}{2}$ บาท จำนวน x ชิ้น

ขายสินค้าได้เงินวันละ .... บาท

ให้ y แทนกำไรที่ได้จากการขายสินค้า x ชิ้น

ดังนั้น y = ...

= ....

= ....

$\frac{dy}{dx}$ = ...

....

....

....

จาก $\frac{dy}{dx}$ = ...จะได้ $\frac{d^2y}{dx^2}$ = ...

ดังนั้น โรงงานจะต้องผลิตสินค้าวันละ .... ชิ้นจึงจะทำให้ได้กำไรมากที่สุด

8. สมศักดิ์รับแผ่นซีดีภาพยนตร์มาขายครั้งละ 120 แผ่น ปรากฏว่าถ้าเขาขายแผ่นละ 40 บาท จะขายได้ทั้งหมด แต่ทุกครั้งที่เขาเพิ่มราคาขายอีกแผ่นละ 1 บาท เขาจะเหลือแผ่นซีดีครั้งละ 2 แผ่น นั่นคือ ถ้าขายซีดีแผ่นละ 41 บาท จะขายได้ 118 แผ่น ถ้าขายซีดีแผ่นละ 42 บาท จะขายได้ 116 แผ่น เช่นนี้เรื่อยไป ถ้าเขาต้องการขายให้ได้เงินมากที่สุด จะต้องขายแผ่นซีดีแผ่นละกี่บาท และได้เงินสูงสุดกี่บาท

วิธีทำ ขายแผ่นละ 40 บาท ขายได้ 120 แผ่น

ขายแผ่นละ $40+1$ บาท ขายได้ $120-2$ แผ่น

ขายแผ่นละ $40+2$ บาท ขายได้ $120-4$ แผ่น

ถ้าขายแผ่นละ $40+x$ บาท ขายได้ .... แผ่น

ให้สมศักดิ์ขายซีดีภาพยนตร์แผ่นละ $40+x$ บาท

เมื่อขึ้นราคาแผ่นละ x บาท จะขายได้ $120-2x$ แผ่น

ให้ขายซีดีภาพยนตร์ได้เงิน y บาท

จะได้ y = $(40+x)$(.............................) .....(1)

= 4,800+ ....

$\frac{dy}{dx}$ = ...

....

....

....

....

....

9. พ่อค้าซื้อข้าวสารมาราคาถุงละ 100 บาท ถ้าขายข้าวสารราคาถุงละ 160 บาท ในเวลา 1 เดือนจะขายได้ 1,000 ถุง แต่ถ้าเขาลดราคาลงถุงละ x บาท จะขายข้าวสารได้เพิ่มขึ้นอีกเดือนละ $100x$ ถุง เขาจะต้องตั้งราคาขายข้าวสารราคาถุงละกี่บาทจึงจะทำให้ขายได้กำไรมากที่สุด

วิธีทำ ให้พ่อค้าขายข้าวสารราคาถุงละ $160-x$ บาท

ใน 1 เดือน ขายข้าวสารได้ .... ถุง

ขายข้าวสารได้เงิน $(160-x)(1{,}000+100x)$ บาท

ขายข้าวสารได้กำไร .... บาท

ให้ขายข้าวสารได้กำไร y บาท

จะได้ y = ...

....

....

....

....

....

....

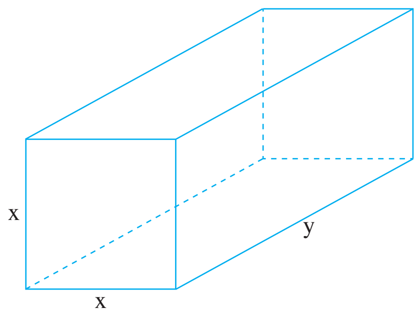
....

....

....

10. ถังทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝาปิดมีฐานกว้าง x เซนติเมตร ยาว y เซนติเมตร สูง x เซนติเมตร ถ้าโลหะที่ใช้ทำถังใบนี้มีพื้นที่ 1,350 ตารางเซนติเมตร จงหาปริมาตรมากที่สุดของถังใบนี้

วิธีทำ โลหะที่ใช้ทำถังประกอบด้วยพื้นที่ผิวข้างและพื้นที่ก้นถังซึ่งเท่ากับ $2x^2+3xy$



จากโจทย์กำหนด จะได้ $2x^2+3xy = 1,350$

$3xy =$ ....

$xy =$ ....

$y =$ ....(1)

ให้ถังมีปริมาตรเท่ากับ V

จะได้ $V = (xy)x$ .....(2)

$=$ ....

$=$ ....

$\frac{dV}{dx} =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

2.9 ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถหาปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง
4. การให้เหตุผล
5. การคิดสร้างสรรค์

ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative)

บทนิยาม

ฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน f ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f

ให้ $f(x) = 2x$

พิจารณาฟังก์ชัน $F_1(x) = x^2$ จะได้ $F_1'(x) = 2x$

$F_2(x) = x^2+5$ จะได้ $F_2'(x) = 2x$

$F_3(x) = x^2-\frac{1}{2}$ จะได้ $F_3'(x) = 2x$

F_1, F_2, F_3 ต่างเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x$

ถ้าให้ $F(x) = x^2+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จะได้ $F'(x) = 2x$

ดังนั้น $F(x) = x^2+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว เป็นรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x$

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (undefinite integral)

รูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ อ่านว่า “ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x”

หมายเหตุ

1. ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f คือปฏิยานุพันธ์ของ f
2. เรียกกระบวนการหา $\int f(x)dx$ ว่า **“การหาปริพันธ์”** $\int$ เป็นเครื่องหมาย **“ปริพันธ์”** เรียก f(x) ว่า **“ปริพัทธ์”** และ dx เป็นสัญลักษณ์ที่บอกว่าการหาปริพันธ์นี้เทียบกับตัวแปร x

สูตรเกี่ยวกับการหาปริพันธ์

1. $\int k\,dx = kx+c$ เมื่อ k และ c เป็นค่าคงตัว
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว และ $n \neq -1$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว และ f(x) มีปริพันธ์
4. $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx+\int g(x)dx$
5. $\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx-\int g(x)dx$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา

(1) $\int 3dx$ (2) $\int x^3 dx$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (4) $\int \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$

(5) $\int (2x+3x^2)dx$ (6) $\int \left(x\sqrt{x}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)dx$

วิธีทำ (1) $\int 3dx =$ **ตอบ**

(2) $\int x^3 dx =$

$=$ **ตอบ**

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ =

=

=

= ตอบ

(4) $\int \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$ =

=

=

= ตอบ

(5) $\int (2x+3x^2)dx$ =

=

=

=

= ตอบ

(6) $\int \left(x\sqrt{x}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)dx$ =

=

=

= ตอบ

ปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูป $(ax+b)^n$

จาก $\frac{d}{dx}(ax+b)^{n+1} = (n+1)(ax+b)^n \cdot a$

ดังนั้น $\int (n+1)(ax+b)^n \cdot a\,dx = (ax+b)^{n+1}$

นั่นคือ $$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int (3x-2)^2 dx$

วิธีทำ $\int (3x-2)^2 dx =$

$=$

$=$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int \frac{1}{\sqrt{5x-1}} dx$

วิธีทำ $\int \frac{1}{\sqrt{5x-1}} dx =$

$=$

$=$

$=$ **ตอบ**

แบบฝึกหัดที่ 2.9

1. จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดต่อไปนี้

(1) $f(x) = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}$

วิธีทำ $f(x) = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}$ จะหา $F(x)$ ที่ $F'(x) = x^{-3}+x^{-2}$

ให้ $F_1(x) = x^{-2}+x^{-1}$ จะได้ $F_1'(x) =$ ....

$F_2(x) =$ .... จะได้ $F_2'(x) =$ ....

$=$ .... $=$ ....

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}$

คือ $F(x) =$ ....

(2) $f(x) = x^3-x^2-x$

วิธีทำ $f(x) =$ .... จะหา $F(x)$ ที่ $F'(x) =$ ....

ให้ $F_1(x) =$ .... จะได้ $F_1'(x) =$ ....

$F_2(x) =$ .... จะได้ $F_2'(x) =$ ....

$=$ ....

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^3-x^2-x$

คือ $F(x) =$ ....

(3) $f(x) = \frac{3}{x^4}+\frac{4}{x^3}-\frac{2}{\sqrt{x}}$

วิธีทำ $f(x) =$ .... จะหา $F(x)$ ที่ $F'(x) = 3x^{-4}+4x^{-3}-2x^{-\frac{1}{2}}$

ให้ $F_1(x) =$ .... จะได้ $F_1'(x) =$ ....

$F_2(x) =$ .... จะได้ $F_2'(x) =$ ....

$=$ .... $=$ ....

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) =$ ....

คือ $F(x) =$ ....

2. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

(1) $\int 7dx$ = ...

(2) $\int x^2 dx$ = ...

(3) $\int -\frac{4}{5}dx$ = ...

(4) $\int x^{\frac{1}{3}}dx$ = ...

(5) $\int x^5 dx$ = ...

(6) $\int -xdx$ = ...

(7) $\int \frac{3}{x^4}dx$

$= 3\int x^{-4}dx$

$= 3\left(\frac{x^{-4+1}}{-4+1}\right)+c$

= ....

= ....

(8) $\int 4x^3 dx$

$= 4\int x^3 dx$

= ....

= ....

= ....

(9) $\int 5\sqrt[3]{x^2}dx$

$= 5\int x^{\frac{2}{3}}dx$

= ....

= ....

(10) $\int 2\sqrt[4]{x}\,dx$

$= 2\int x^{\frac{1}{4}}dx$

= ....

= ....

(11) $\int\left(5-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$= \int 5dx-\int x^{-\frac{1}{2}}dx$

= ....

= ....

(12) $\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right)dx$

$= \int x^{-3}dx-\int x^{-5}dx$

= ....

= ....

(13) $\int(2x^3-5x^2+3x+1)dx$

$= 2\int x^3dx-5\int x^2dx+3\int xdx+\int dx$

= ....

= ....

(14) $\int(4x^3+3x^2-2x-6)dx$

= ....

= ....

= ....

(15) $\int(4-6t^2-5t^4)dt$

$= \int 4dt-6\int t^2dt-5\int t^4dt$

$= 4t-\frac{6t^3}{3}-\frac{5t^5}{5}+c$

= ....

(16) $\int(2t-3)^2dt$

$= \int(4t^2-12t+9)dt$

= ....

= ....

(17) $\int\left(\frac{3x^2-2x+1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$= \int(3x^{2-\frac{1}{2}}-2x^{1-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx$

$= 3\int x^{\frac{3}{2}}dx-2\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx$

= ....

= ....

(18) $\int(3x-2)(2+x)dx$

$= \int(3x^2+4x-4)dx$

= ....

= ....

= ....

(19) $\int(4-2t^2)^2dt$

= ....

= ....

= ....

= ....

(20) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^2dx$

= ....

= ....

= ....

= ....

3. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันในรูป $(ax+b)^n$ ต่อไปนี้ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

(1) $\int(2x-1)^3dx$

$= \frac{(2x-1)^4}{2(4)}+c$

= ....

(2) $\int(2-5x)^4dx$

= ....

= ....

(3) $\int\sqrt{7x+3}\,dx$

$= \int(7x+3)^{\frac{1}{2}}dx$

= ....

= ....

(4) $\int\sqrt[3]{3-4x}\,dx$

= ....

= ....

= ....

ให้ $u = g(x)$ สำหรับฟังก์ชัน g หาอนุพันธ์ได้ที่ x
ถ้า n เป็นจำนวนตรรกยะ และ $n \neq 1$ แล้ว $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int(2x^3+3)^7x^2dx$

วิธีทำ ให้

$u =$

$\frac{du}{dx} =$

$du =$

$\frac{1}{6}du =$

$\int(2x^3+3)^7x^2dx =$

$=$

$=$

$=$ **ตอบ**

4. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้โดยวิธีแทนค่าตัวแปร เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

(1) $\int(4-2x^2)^7 x\,dx$

วิธีทำ ให้

$u =$

$\frac{du}{dx} =$

$-\frac{1}{4}du =$

$\int(4-2x^2)^7 x\,dx =$

$=$

$=$

$=$

(2) $\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

วิธีทำ ให้

$u =$

$du =$

และ $x =$

$\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx =$

$=$

$=$

$=$

$=$

5. เส้นโค้งเส้นหนึ่งผ่านจุด $(1, -1)$ และ ณ จุดนี้เส้นโค้งมีความชัน $3x^2-4x-1$ จงหาสมการเส้นโค้ง

วิธีทำ ให้ความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ คือ $f'(x)$

จากโจทย์กำหนด จะได้ $f'(x) =$

$f(x) =$

$f(x) =$

เนื่องจาก $f(1) =$

จะได้ $-1 =$

$c =$

ดังนั้น สมการเส้นโค้งคือ $y =$

6. กำหนดให้ $\frac{dy}{dx} = 2x-\frac{2}{x^3}$ และ $y = 4$ เมื่อ $x = 1$ จงหาค่าของ y เมื่อ $x = 2$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนด $\frac{dy}{dx} =$

$=$

$y =$

$=$

$=$

แทน $y = 4$ และ $x = 1$ เพื่อหาค่าของ c

$4 =$

$c =$

จะได้ $y =$

ดังนั้น เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y =$

$=$

7. กำหนดให้ $f''(x) = 3x-2$ และ $f(1) = f'(1) = 3$ จงหา $f(x)$

วิธีทำ จาก $f''(x) = 3x-2$

$f'(x) = \int(3x-2)dx$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2-2x+c_1$ .....(1)

จากโจทย์กำหนดให้ $f'(1) =$ ....

จะได้ .... $= \frac{3}{2}(1)^2-2(1)+c_1$

$3+2-\frac{3}{2} = c_1$..

$c_1 =$ ....

จาก (1); $f'(x)$ = ...

$f(x)$ = ...

= ....

จากโจทย์กำหนดให้ $f(1)$ = ...

จะได้ $3 = \frac{1}{2}(1)^3 - 1^2 + \frac{7}{2}(1) + c_2$

$3 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{7}{2}$ = ...

.... $= 0$

ดังนั้น $f(x)$ = ...

8. เส้นโค้งเส้นหนึ่งผ่านจุด (2, 0) และความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใดๆ เท่ากับ $x^2 - 2x$ สำหรับทุกค่าของ x จงหาสมการเส้นโค้งและหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

วิธีทำ ให้ $y = f(x)$ เป็นสมการเส้นโค้ง

จากโจทย์กำหนด $f'(x)$ = ...

$f(x)$ = ...

= ....

= ....

เส้นโค้งผ่านจุด (2, 0) จะได้ $f(2)$ = ...

แทนค่าจะได้ 0 = ...

c = ...

สมการเส้นโค้งคือ y = ...

หาค่าวิกฤตที่ $f'(x) = 0$

ดังนั้น .... $= 0$

....

$x = 0$ หรือ $x - 2 = 0$

x = ... หรือ x = ...

ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ ....

จาก $f'(x) = x^2-2x$ จะได้ $f''(x)$ = ...

$f''(0)$ = ...

$f''(2)$ = ...

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ ....

และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ ....

9. เส้นโค้ง $y = f(x)$ ผ่านจุด $(0, 2)$ และความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใดๆ เท่ากับ $3x^2-4x-1$ จงหาพิกัดของจุดที่เส้นโค้งตัดแกน X

วิธีทำ จากโจทย์กำหนด $f'(x)$ = ...

$f(x)$ = ...

= ....

= ....

เส้นโค้งผ่านจุด $(0, 2)$ จะได้ $f(0)$ = ...

แทนค่าจะได้ 2 = ...

c = ...

สมการเส้นโค้งคือ y = ...

เส้นโค้งตัดแกน X เมื่อ y = ...

จะได้ x^3-2x^2.................... =

$x^2(x-2)$.................... = 0

$(x-2)$(..................) = 0

$(x-2)$.................... = 0

$x-2 = 0$ หรือ .... หรือ ....

$x = 2$ หรือ $x =$ .... หรือ $x =$ ....

ดังนั้น เส้นโค้งตัดแกน X ที่จุด ....

10. ในขณะเวลา t ใด ๆ วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง t^2+4t เมตรต่อวินาที^{2} ขณะที่เริ่มต้นจับเวลา วัตถุชิ้นนี้เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 4 เมตรต่อวินาที และได้ระยะทาง 6 เมตร จงหา

(1) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา $t = 3$ วินาที

(2) ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่เมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที

วิธีทำ (1) จากโจทย์กำหนด ความเร่ง $a = t^2+4t$

$$a = \frac{dv}{dt} = t^2+4t$$

ความเร็ว v = ...

v = ...

เมื่อ $t = 0, v = 4$ จะได้ c_1 = ...

จะได้ v = ...

ดังนั้น เมื่อ $t = 3$ ความเร็วของวัตถุเท่ากับ .... เมตรต่อวินาที

(2) ระยะทาง $s = \int v\,dt$

s = ...

s = ...

s = ...

เมื่อ $t = 0, s = 6$ จะได้ c_2 = ...

จะได้ s = ...

เมื่อ $t = 3$; s = ...

= ....

ดังนั้น ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่เมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที เท่ากับ .... เมตร

2.10 ปริพันธ์จำกัดเขต

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิต และนำไปใช้แก้ปัญหาได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง
4. การให้เหตุผล
5. การคิดสร้างสรรค์

ทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัส

กำหนด f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b]

ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

การหาปริพันธ์จำกัดเขต (definite integral)

$\int_a^b f(x)dx$

1. หาปฏิยานุพันธ์ F(x) ของ f(x) คือ $\int f(x)dx$
2. หา $F(b) - F(a)$ คือ $\int_a^b f(x)dx$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int_0^2 x^2dx$

วิธีทำ

$$\int_0^2 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{2^3}{3}-\frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int_1^2 (x^2+2x)dx$

วิธีทำ

$$\int_1^2 (x^2+2x)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right)\right|_1^2 = \left.\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\right|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3}+2^2\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1^2\right) = \frac{8}{3}+4-\frac{1}{3}-1 = \frac{16}{3}$$

ตอบ

แบบฝึกหัดที่ 2.10

1. จงหาปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

(1) $\int_1^4 x^2dx$

$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4$

$= \frac{4^3}{3}-\frac{1^3}{3}$

= ....

= ....

(2) $\int_0^1 x^3dx$

$= \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1$ ....

= ....

= ....

= ....

(3) $\int_{1}^{27} x^{\frac{1}{3}}dx$

$= \left.\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_{1}^{27}$

$= \left.\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right|_{1}^{27}$

= ....

= ....

= ....

= ....

(4) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^{3}}dx$

$= \int_{1}^{2} x^{-3}dx$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

(5) $\int_{4}^{9} x^{-\frac{1}{2}}dx$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

(6) $\int_{1}^{8} 2x^{-\frac{1}{3}}dx$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

(7) $\int_{1}^{3} (4+3x-x^{3})dx$

= ....

= ....

= ....

= ....

(8) $\int_{1}^{4} (x+1)(2x+1)dx$

= ....

= ....

= ....

= ....

(9) $\int_1^2 (x+2)(x+3)dx$

= ....
= ....
= ....
= ....

(10) $\int_1^2 \left(\frac{x^3+1}{x^2}\right)dx$

= ....
= ....
= ....
= ....

(11) $\int_1^2 \left(\frac{2x^3+1}{x^3}\right)dx$

= ....
= ....
= ....
= ....

(12) $\int_1^4 \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)dx$

= ....
= ....
= ....
= ....

(13) $\int_1^4 \left(\frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$

= ....
= ....
= ....
= ....

(14) $\int_1^2 \left(3-2x^2+\frac{4}{x^3}\right)dx$

= ....
= ....
= ....
= ....

(15) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

(16) $\int_{1}^{14} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-1}}$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

(17) $\int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{x^3}\right)dx$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

(18) $\int_{0}^{3} (x+1)^3 dx$

= ....

= ....

= ....

= ....

2. กำหนดให้ $\int_{0}^{4} g(x)dx = 6$ จงหา

(1) $\int_{0}^{4} 2g(x)dx$

= ....

= ....

= ....

(2) $\int_{4}^{0} g(x)dx$

= ....

= ....

= ....

(3) $\int_0^4 [g(x)-2]dx$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

(4) $\int_4^0 [g(x)+1]dx$

= ....

= ....

= ....

= ....

= ....

3. กำหนดให้ $\int_0^3 g(x) = 5$ จงหา

(1) $\int_0^3 [x-g(x)]dx$

= ....

= ....

= ....

= ....

(2) $\int_0^3 [2-g(x)]dx$

= ....

= ....

= ....

= ....

(3) $\int_0^3 \frac{1}{2}g(x)dx$

= ....

= ....

= ....

(4) $\int_3^0 g(x)dx$

= ....

= ....

= ....

2.11 พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งที่กำหนดให้ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

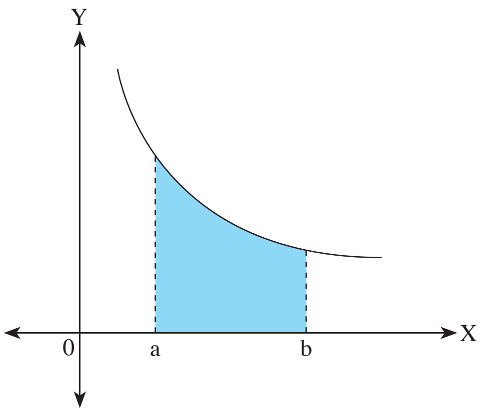
1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง
4. การให้เหตุผล
5. การคิดสร้างสรรค์

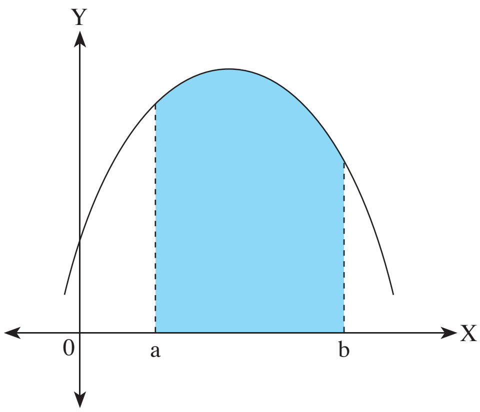
ทฤษฎีบท 11

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b] และ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f จาก $x = a$ ถึง $x = b$

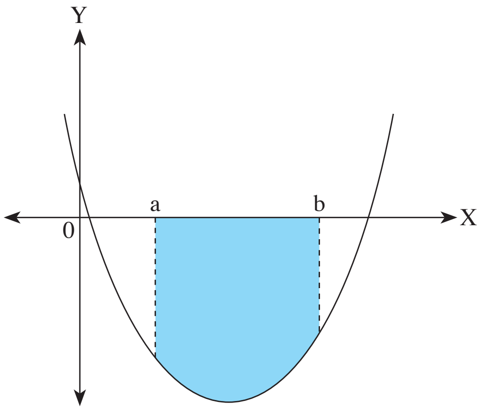
1. ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง [a, b] และ A เป็นพื้นที่เหนือแกน X แล้ว $A = \int_a^b f(x)dx$
2. ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง [a, b] และ A เป็นพื้นที่ใต้แกน X แล้ว $A = -\int_a^b f(x)dx$

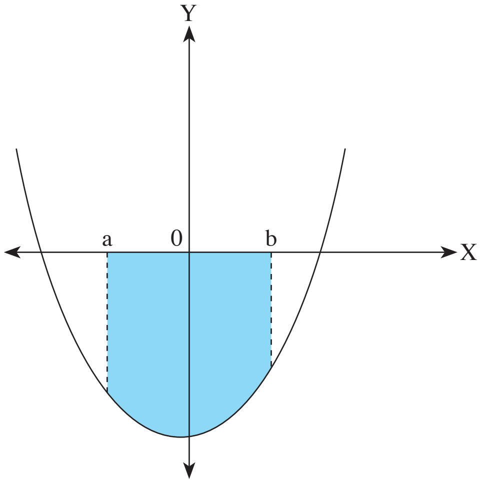
บริเวณที่อยู่เหนือแกน X





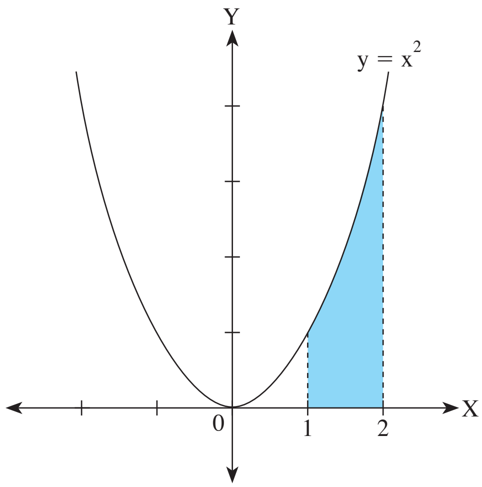
บริเวณที่อยู่ใต้แกน X





ตัวอย่างที่ 1 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = x^2$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 2$

วิธีทำ



ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = x^2$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 2$

เนื่องจาก $f(x) \geqslant 0$ สำหรับทุก $x \in [1, 2]$

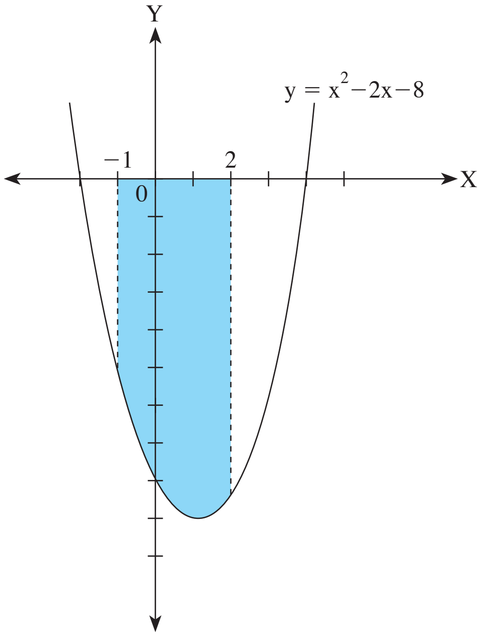
จะได้

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 x^2 dx \\ &= \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{3} \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $f(x) = x^2-2x-8$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 2$

วิธีทำ



กราฟของ f เป็นพาราโบลาหงาย

ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ

$y = x^2-2x-8$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 2$

เนื่องจาก $f(x) \leqslant 0$ สำหรับทุก $x \in [-1, 2]$

จะได้ $$A = -\int_{-1}^{2}(x^2-2x-8)dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3}-x^2-8x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

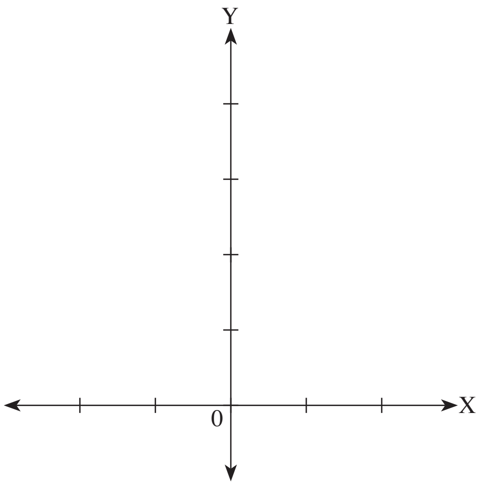
$$= -\left[\left(\frac{8}{3}-4-16\right)-\left(-\frac{1}{3}-1+8\right)\right]$$

$$= 24$$ ตารางหน่วย **ตอบ**

แบบฝึกหัดที่ 2.11

1. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = x^2$ จาก $x = -2$ ถึง $x = 0$

วิธีทำ



ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ

$y =$ .... จาก $x =$ .... ถึง $x =$ ....

เนื่องจาก $f(x) \geqslant$ .... สำหรับทุก $x \in$ [.............]

จะได้ $$A = \int_{-2}^{0} x^2dx$$

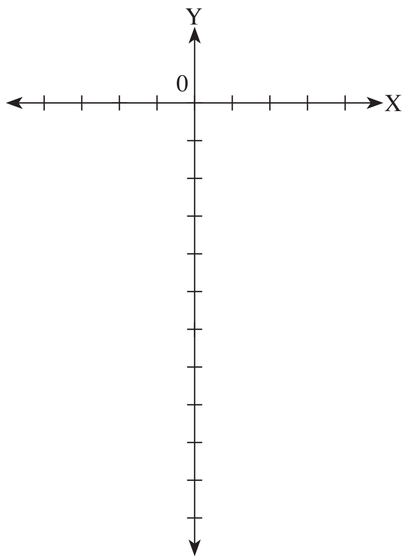
= ....

= ....

= ....

2. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = -x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$

วิธีทำ



ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ

$y =$ .... จาก $x =$ .... ถึง $x =$ ....

เนื่องจาก $f(x)$ .... สำหรับทุก $x \in$ [................]

จะได้ $A = -\int_{0}^{3} -x^2 dx$

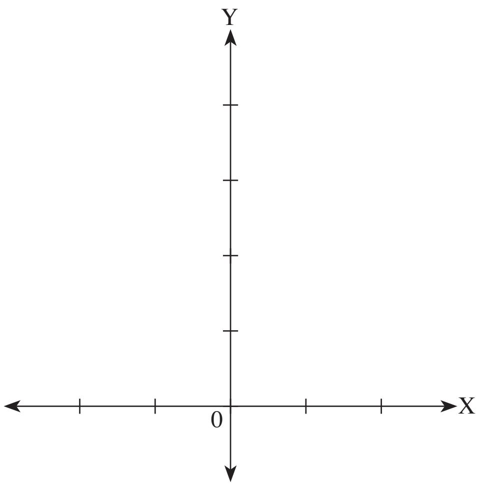
$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

3. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = 4-x^2$ และแกน X

วิธีทำ



กราฟของ $y = 4-x^2$ ตัดแกน X เมื่อ $y = 0$

$$4-x^2 = 0$$

$$(2-x)(2+x) = 0$$

$2-x = 0$ หรือ $2+x = 0$

$x = 2$ หรือ $x = -2$

ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ

$y =$ .... จาก $x =$ .... ถึง $x =$ ....

เนื่องจาก $f(x) \geqslant$ .... สำหรับทุก $x \in$ [.............]

จะได้ $A = \int_{-2}^{2} (4-x^2)dx$

$=$ ....

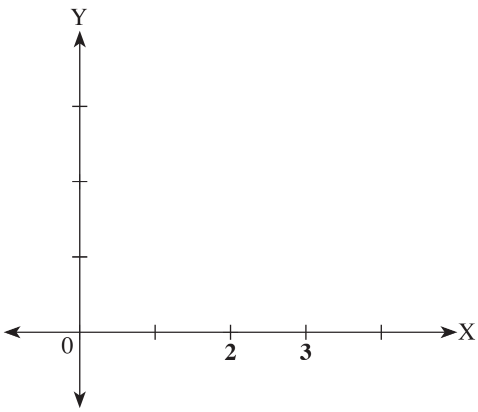
$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

4. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = x^2 - 5x + 6$ และแกน X

วิธีทำ



กราฟของ $y = x^2 - 5x + 6$ ตัดแกน X เมื่อ y = ...

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

$x - 2 = 0$ หรือ $x - 3 = 0$

$x = 2$ หรือ $x = 3$

ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ

y = ... จาก x = ... ถึง x = ...

เนื่องจาก f(x) .... สำหรับทุก x ∈ [................]

จะได้ A = ...

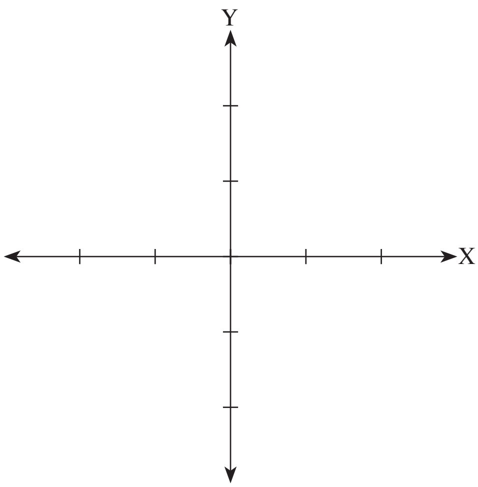
= ....

= ....

= ....

5. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = x^3$ แกน X และเส้นตรง $x = 1$

วิธีทำ



ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ

y = ... จาก x = ... ถึง x = ...

เนื่องจาก f(x) .... สำหรับทุก x ∈ [................]

จะได้ A = ...

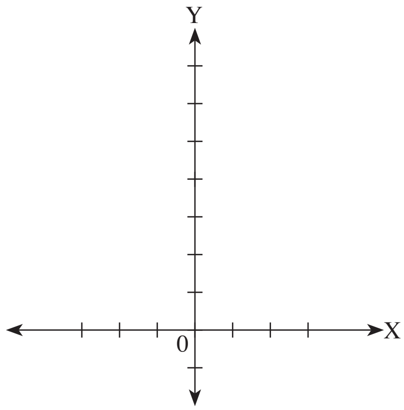
= ....

= ....

= ....

6. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = (3+x)(2-x)$ และแกน X

วิธีทำ



ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ

$y =$ .... จาก $x =$ .... ถึง $x =$ ....

เนื่องจาก $f(x)$ .... สำหรับทุก $x \in$ [...............]

จะได้ A = ...

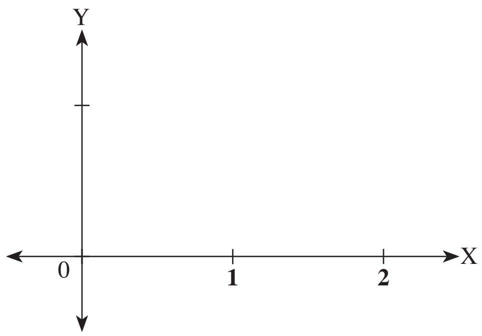
= ....

= ....

= ....

7. กำหนดสมการเส้นโค้ง $y = x(x-1)(x-2)$ จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งและแกน X

วิธีทำ



จากสมการเส้นโค้ง $y = x(x-1)(x-2)$

ตัดแกน X ที่ $x = 0$, $x = 1$ และ $x = 2$

$$A_1 = \int_0^1 x(x-1)(x-2)dx$$

$$= \int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx$$

= ....

= ....

= .... ตารางหน่วย

$$A_2 = -\int_1^2 (x^3-3x^2+2x)dx$$

= ....

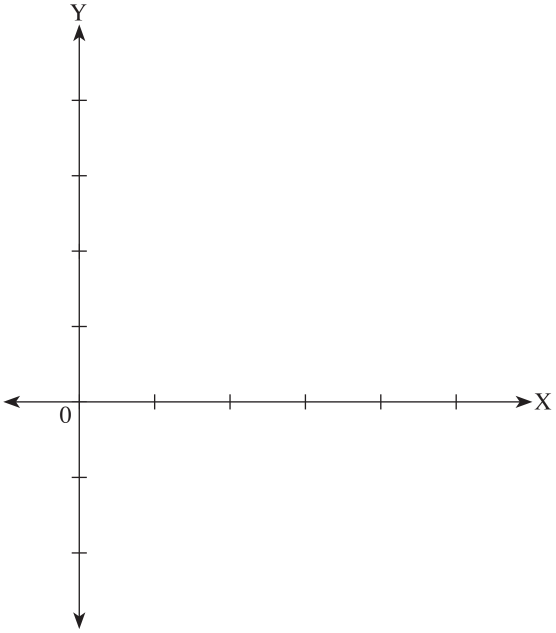
= ....

= .... ตารางหน่วย

ดังนั้น พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x(x-1)(x-2)$ และแกน X เท่ากับ

.... ตารางหน่วย

8. กำหนดสมการเส้นโค้ง $y = x^2-5x+4$ จงหาพื้นที่ A_1, A_2 และ A_3 เมื่อ



A_1 เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง
$y = x^2-5x+4$ แกน X และแกน Y

A_2 เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง
$y = x^2-5x+4$ แกน X

A_3 เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง
$y = x^2-5x+4$ แกน X และเส้นตรง $x = 5$

วิธีทำ เส้นโค้ง $y = x^2-5x+4$ ตัดแกน X เมื่อ $x = 1$ และ $x = 4$

A_1 = ...

= ....

= ....

= ....

A_2 = ...

= ....

= ....

= ....

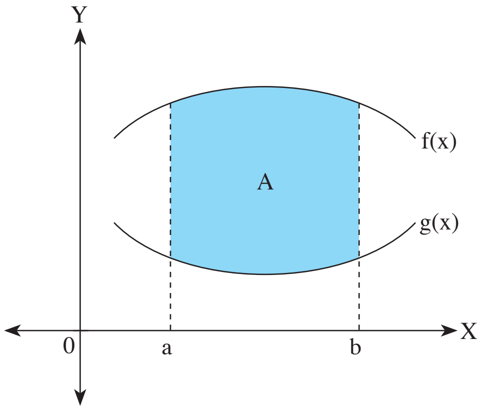
A_3 = ...

= ....

= ....

= ....

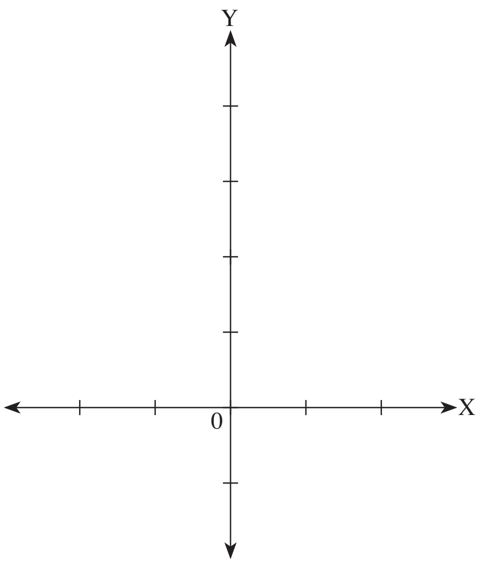
พื้นที่ระหว่างเส้นโค้งสองเส้น



A = พื้นที่ใต้เส้นโค้ง f(x) − พื้นที่ใต้เส้นโค้ง g(x) จาก $x = a$ ถึง $x = b$

ดังนั้น $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

9. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 4 - x^2$ และ $y = x^2 - 2x$



หาจุดตัดของเส้นโค้ง

$$y = 4 - x^2 \quad .....(1)$$

$$y = x^2 - 2x \quad .....(2)$$

$(1) = (2);\ 4 - x^2 = x^2 - 2x$

$0 = 2x^2 - 2x - 4$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 0$

$x + 1 = 0$ หรือ $x - 2 = 0$

$x = -1$ หรือ $x = 2$

ดังนั้น $A = \int_{-1}^{2} [(4 - x^2) - (x^2 - 2x)]dx$

$= \int_{-1}^{2} [(-2x^2 + 2x + 4)]dx$

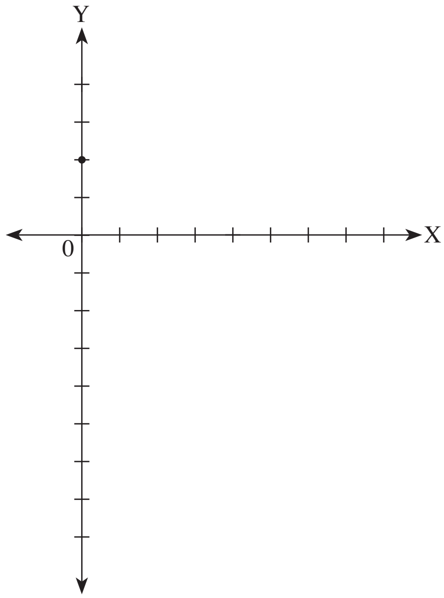
= ....

= ....

= ....

10. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2-6x+2$ และ $y = 2-x$

วิธีทำ



หาจุดตัดของเส้นโค้ง $y = x^2-6x+2$ และเส้นตรง $y = 2-x$

$$x^2-6x+2 = 2-x$$

$$x^2-5x = 0$$

$$x(x-5) = 0$$

....

....

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2-6x+2$ และเส้นตรง $y = 2-x$ คือ

$$A = \int_0^5 [(2-x)-(x^2-6x+2)]dx$$

= ....

= ....

= ....

= ....

สรุป

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ลิมิตของฟังก์ชัน คือ การพิจารณาค่าของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ว่า "เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริงค่าใดค่าหนึ่ง แล้วฟังก์ชัน $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ค่าใด"

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน คือ การพิจารณาว่ากราฟของฟังก์ชันขาดตอน ณ จุดนั้นหรือไม่ ซึ่งพิจารณาได้ 2 วิธี คือ จากกราฟและจากทฤษฎีบทโดยมีบทนิยามดังนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วงเปิด (a, b) และ $c \in (a, b)$ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(c)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

แคลคูลัสเบื้องต้น

อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตสามารถดำเนินการได้ 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้บทนิยามของการหาอนุพันธ์ในรูปลิมิต

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

วิธีที่ 2 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร

- **อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ**

ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และฟังก์ชัน g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$ แล้วฟังก์ชัน $(g \circ f)(x)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$

- **อนุพันธ์อันดับสูง**

อนุพันธ์อันดับสูงเกี่ยวข้องกับความเร็วและความเร่ง โดย $\frac{ds}{dt} = v$ และ $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = a$

เมื่อ s คือระยะทาง, t คือเวลา, v คือความเร็ว และ a คือความเร่ง

- **การประยุกต์ของอนุพันธ์**

เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f สามารถนำความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตมาใช้หาช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือเป็นฟังก์ชันลด รวมถึงค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

- **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต**

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $\int f(x)dx$ โดย $\int f(x)dx = F(x)+c$ เมื่อ $F'(x) = f(x)$ และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ (ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f คือ ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f)

- **ปริพันธ์จำกัดเขต**

กำหนด f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ เขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx$ โดย $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ ทั้งนี้เราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการหาปริพันธ์จำกัดเขตมาใช้ในการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ ได้

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ค่าของ $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2+x}}-\sqrt{3}}{x-2}$ เท่ากับข้อใด
   1. $\frac{1}{8\sqrt{3}}$
   2. $\frac{1}{4\sqrt{3}}$
   3. 0
   4. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

2. ค่าของ $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}}$ เท่ากับข้อใด
   1. $\frac{1}{2}$
   2. 1
   3. 2
   4. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

3. ค่าของ $\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h\sqrt[3]{8+h}}-\frac{1}{2h}\right)$ เท่ากับข้อใด
   1. $\frac{1}{12}$
   2. $-\frac{4}{3}$
   3. $-\frac{16}{3}$
   4. $-\frac{1}{48}$

4. ค่าของ $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+6}}$ เท่ากับข้อใด
   1. -2
   2. $-\frac{1}{2}$
   3. $\frac{1}{2}$
   4. 2

5. กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} Ax+B & \text{เมื่อ } x\le 1 \\ \dfrac{x^2-6x}{x^2-5x-6} & \text{เมื่อ } 1<x<6 \\ Bx+A & \text{เมื่อ } x\ge 6 \end{cases}$$

   ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x=1$ และ $x=6$ ค่าของ $A+8B$ เท่ากับข้อใด
   1. 1
   2. 3
   3. 5
   4. 7

6. กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{เมื่อ } -2\le x<0 \\ x+2 & \text{เมื่อ } 0\le x\le 2 \end{cases}$$

   และ
$$g(x)=\begin{cases} |x| & \text{เมื่อ } -4\le x<-2 \\ x+2 & \text{เมื่อ } -2\le x\le 4 \end{cases}$$

   ข้อใดเป็นจริง
   1. $\lim_{x\to -2^+}f(g(x))=2$
   2. $f(g(x))$ ต่อเนื่องที่ $x=-4$
   3. $f(g(x))$ หาค่าได้ที่ $x=2$
   4. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

7. กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} 6(5^x) & \text{เมื่อ } x\le 0 \\ 2a+x & \text{เมื่อ } x>0 \end{cases}$$

   ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$ เมื่อ a มีค่าเท่าไร
   1. 3
   2. 2
   3. 1
   4. -1

8. กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{2x^3-7x^2+7x-2} & \text{เมื่อ } x\ne 2 \\ 1 & \text{เมื่อ } x=2 \end{cases}$$

   $f'(2)$ เท่ากับข้อใด
   1. 1
   2. $-\frac{1}{3}$
   3. $\frac{1}{3}$
   4. $\frac{4}{3}$

9. กำหนดให้ $f(x)=x^2-6x+c$ โดยที่ c เป็นจำนวนจริง ถ้า a และ b เป็นคำตอบของสมการ $f(x)=0$ เมื่อ $a>b$ และ $3a+2b=20$ แล้ว $f'(c)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
   1. -38
   2. -26
   3. 26
   4. 38

10. กำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ $f(x) = xg(x)$ ถ้า $f'(x) = 4x^3+9x^2$ และ $f(-2) = -8$ แล้ว $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ ที่จุด $x = -2$ มีค่าเท่ากับข้อใด
   1. -4
   2. -2
   3. 1
   4. 4

11. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุด และ $h(x) = x^3+1$ ถ้า a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $(h\circ f)(a) = 9, (h\circ f)'(a) = 0, (h\circ f)''(a) = -1$ แล้วข้อใดถูกต้อง
   1. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด a และมีค่าเท่ากับ 1
   2. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด a และมีค่าเท่ากับ 2
   3. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด a และมีค่าเท่ากับ 1
   4. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด a และมีค่าเท่ากับ 2

12. $\int(\sqrt{x}+1)^2dx$ เท่ากับข้อใด
   1. $\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+c$
   2. $\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+c$
   3. $2x^2+\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}}+x+c$
   4. $2x+\frac{3}{4}\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+c$

13. $\int\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2dx$ เท่ากับข้อใด
   1. $x^3+x-\frac{1}{x}+c$
   2. $\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+c$
   3. x^3+x^2-x+c
   4. $\frac{1}{3}x^3-2x^2-\frac{1}{x}+c$

14. $\int\frac{3x^2-2x+1}{\sqrt{x}}dx$ เท่ากับข้อใด
   1. $\frac{2}{15}(9x^2-10x+15)+c$
   2. $\frac{2}{5}(9x^2-10x+15)+c$
   3. $\frac{2}{15}\sqrt{x}(9x^2-10x+15)+c$
   4. $\frac{2}{15}\sqrt{x}(3x^2-10x+15)+c$

15. $\int\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ เท่ากับข้อใด
   1. $\frac{1}{2}\sqrt{x-1}+c$
   2. $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+c$
   3. $\sqrt{x-1}+c$
   4. $2\sqrt{x-1}+c$

16. $\int(4-2x^2)^7xdx$ เท่ากับข้อใด
   1. $-\frac{1}{32}(4-2x^2)^8+c$
   2. $-\frac{1}{16}(4-2x^2)^8+c$
   3. $\frac{1}{32}(4-2x^2)^8+c$
   4. $\frac{1}{16}(4-2x^2)^8+c$

17. $\int_1^2\frac{x^7-2x+1}{4x^3}dx$ เท่ากับข้อใด
   1. $\frac{221}{160}$
   2. $\frac{223}{160}$
   3. $\frac{221}{80}$
   4. $\frac{223}{80}$

18. พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2-x-6$ และเส้นตรง $y = -4$ เท่ากับข้อใด
   1. $\frac{3}{2}$ ตารางหน่วย
   2. $\frac{5}{2}$ ตารางหน่วย
   3. $\frac{7}{2}$ ตารางหน่วย
   4. $\frac{9}{2}$ ตารางหน่วย

19. พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - x$ และ $y = x - x^2$ เท่ากับข้อใด
   1. $\frac{1}{6}$ ตารางหน่วย
   2. $\frac{1}{4}$ ตารางหน่วย
   3. $\frac{1}{3}$ ตารางหน่วย
   4. $\frac{1}{2}$ ตารางหน่วย

20. พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ และแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = 4$ เท่ากับข้อใด
   1. 16 ตารางหน่วย
   2. 18 ตารางหน่วย
   3. $\frac{109}{3}$ ตารางหน่วย
   4. $\frac{112}{3}$ ตารางหน่วย