คณิตศาสตร์ เล่ม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3

Slide PowerPoint_สื่อประกอบการสอน

บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด : 142 ถนนตะนาว เขตพระนคร กรุงเทพฯ 10200
Aksorn CharoenTat ACT.Co.,Ltd : 142 Tanao Rd. Pranakorn Bangkok 10200 Thailand
โทรศัพท์ : 02 622 2999 โทรสาร : 02 622 1311-8 webmaster@aksorn.com / www.aksorn.com

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2

หลักการนับเบื้องต้น

ผลการเรียนรู้

- เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ในการแก้ปัญหา

จาก

ในการแข่งขันฟุตบอลลีก ผู้จัดการแข่งขันจะต้องจัดตารางให้แต่ละสโมสร
พบกันหมด ซึ่งมีจำนวนสโมสรเข้าร่วมการแข่งขันทั้งหมด 18 สโมสร

หลักการนับเบื้องต้น

• หลักการคูณ (เป็นการทำงานที่ต่อเนื่องกัน)

$$\text{จำนวนวิธีการทำงานทั้งหมด} = \text{ผลคูณของจำนวนวิธีในแต่ละขั้นตอนย่อย ๆ}$$
$$= n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k \text{ วิธี}$$

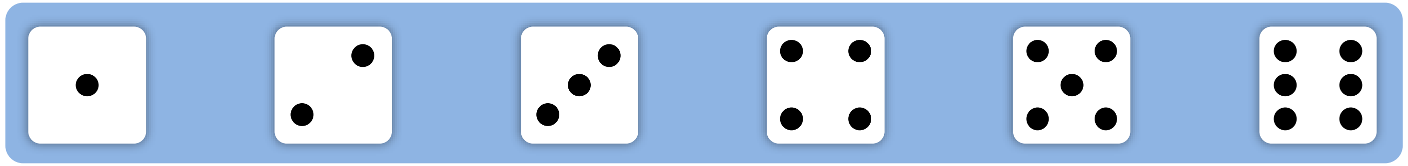
หากกรณีที่มีการทำงาน k อย่างต่อเนื่องกัน และแต่ละอย่างทำได้ n วิธี เท่า ๆ กัน จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ n^k วิธี

ตัวอย่างที่ 1

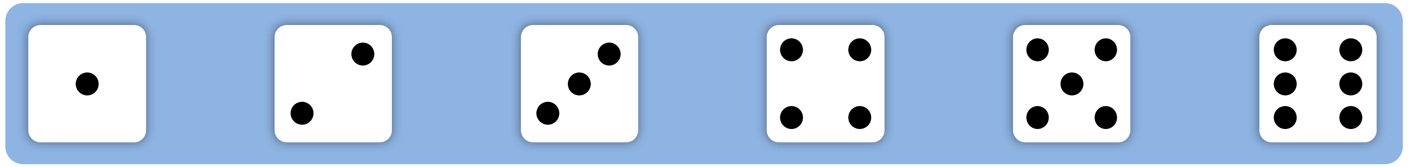
ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน ให้หาจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้

วิธีทำ การทำงานในตัวอย่างนี้ มี 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าลูกที่ 1 มีจำนวน 6 วิธี



ขั้นตอนที่ 2 แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าลูกที่ 2 มีจำนวน 6 วิธี



ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดในการทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกันเท่ากับ $6 \times 6 = 36$ วิธี

- หลักการบวก (เป็นการทำงานที่ไม่ต่อเนื่องกัน)

จำนวนวิธีในการทำงานทั้งหมด = ผลบวกของจำนวนวิธีในแต่ละแบบ

$= n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2

ถ้านิธิศต้องการหยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ ให้หาจำนวนวิธีที่นิธิศจะหยิบได้ไพ่แต้ม $3, 6, 10$ หรือ K

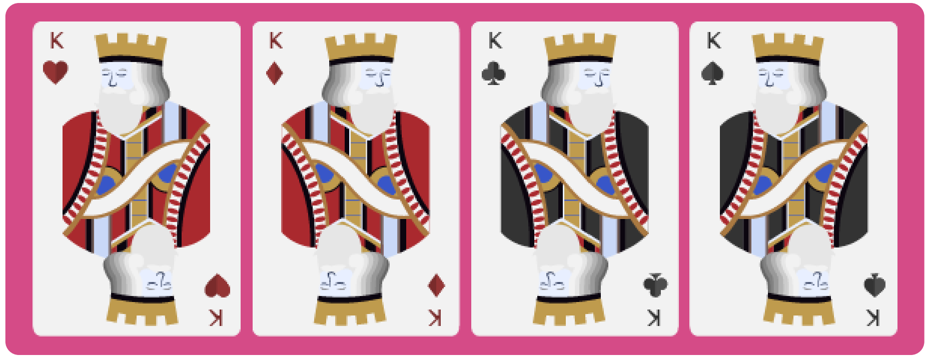
วิธีทำ การทำงานในตัวอย่างนี้ แบ่งเป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 หยิบได้ไพ่แต้ม 3 จำนวน 1 ใบ จากทั้งหมด 4 ใบ จะหยิบได้ 4 วิธี

กรณีที่ 2 หยิบได้ไพ่แต้ม 6 จำนวน 1 ใบ จากทั้งหมด 4 ใบ จะหยิบได้ 4 วิธี

กรณีที่ 3 หยิบได้ไพ่แต้ม 10 จำนวน 1 ใบ จากทั้งหมด 4 ใบ จะหยิบได้ 4 วิธี

กรณีที่ 4 หยิบได้ไพ่แต้ม K จำนวน 1 ใบ จากทั้งหมด 4 ใบ จะหยิบได้ 4 วิธี

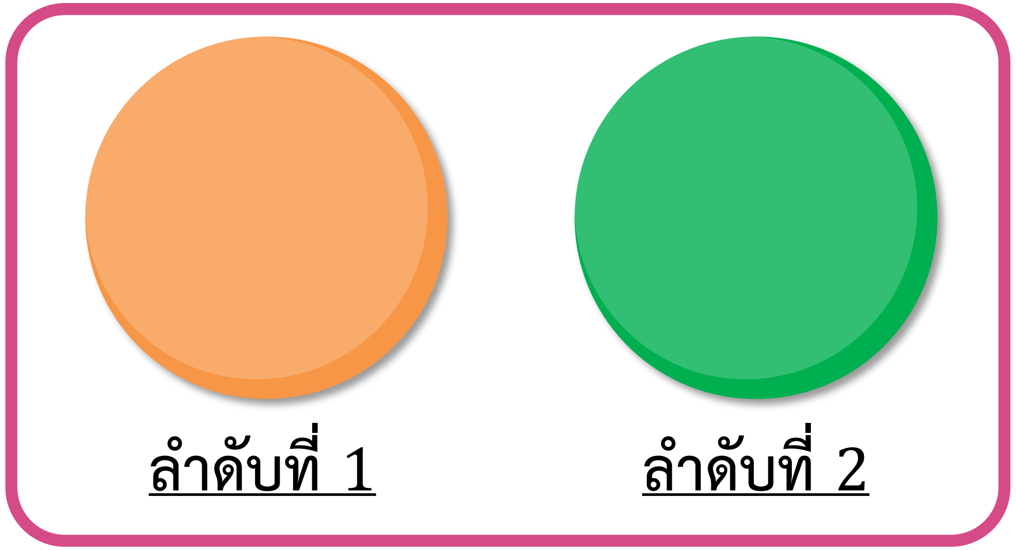


ดังนั้น นิธิศจะมีวิธีหยิบไพ่ 1 ใบ ได้เป็นไพ่แต้ม $3, 6, 10$ หรือ K เท่ากับ $4 + 4 + 4 + 4 = 16$ วิธี

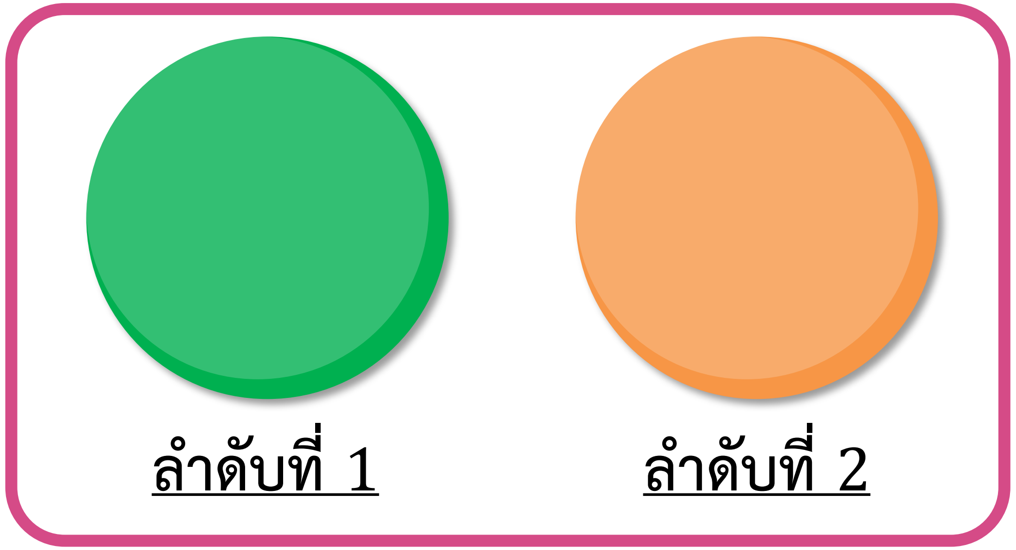
การเรียงสับเปลี่ยน

การเรียงสับเปลี่ยนเป็นการนำสิ่งของหลายสิ่งที่แตกต่างกันทุกชิ้น หรือมีสิ่งของบางชิ้นซ้ำกัน มาจัดเรียงเพียงบางส่วนหรือทั้งหมด โดยยึดลำดับเป็นสำคัญ

ดังนั้น การหยิบก่อนหลังหรือการสลับตำแหน่งจะถือเป็นวิธีที่ต่างกัน เช่น



ไม่เหมือนกับ



แฟกทอเรียล

เป็นการคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n เขียนแทนด้วย n!

ซึ่ง $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

$n! = n \times (n-1)!$ และ $0! = 1$ เสมอ

ตัวอย่างที่ 3

1) $6!$ 2) $4! + 3!$ 3) $6! - 4!$ 4) $6!\,4!$ 5) $\dfrac{6!}{0!\,4!}$

วิธีทำ

1) $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

2) $4! + 3! = (4 \times 3!) + 3!$
$= (4 + 1)3!$
$= 5 \times 3!$
$= 30$

3) $6! - 4! = (6 \times 5 \times 4!) - 4!$
$= [(6 \times 5) - 1]4!$
$= 29 \times 4!$
$= 696$

แฟกทอเรียล

เป็นการคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n เขียนแทนด้วย n!

ซึ่ง $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ \dots \times 3 \times 2 \times 1$

$n! = n \times (n-1)!$ และ $0! = 1$ เสมอ

ตัวอย่างที่ 3

1) $6!$ 2) $4! + 3!$ 3) $6! - 4!$ 4) $\boxed{6!\,4!}$ 5) $\boxed{\dfrac{6!}{0!\,4!}}$

วิธีทำ

4) $6!\,4! = (6 \times 5 \times 4!) \times 4!$

$= 30 \times (4!)^2$

$= 17{,}280$

5) $\dfrac{6!}{0!\,4!} = \dfrac{(6 \times 5) \times 4!}{0!\,4!}$

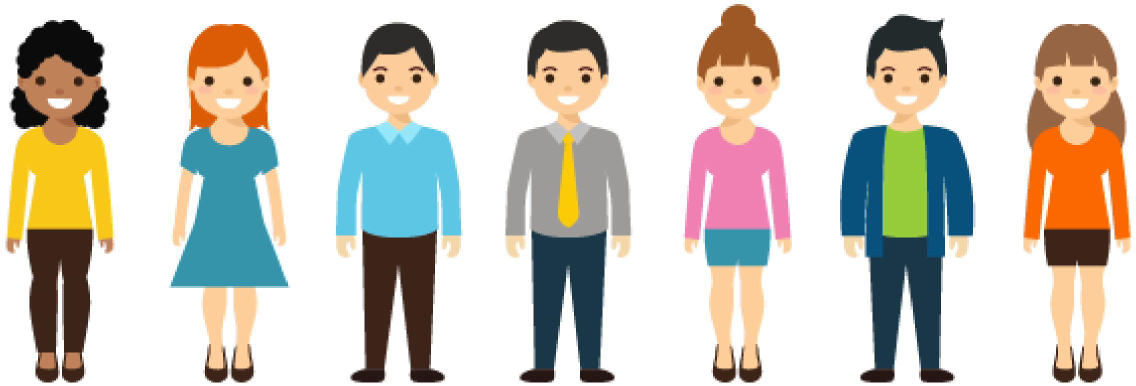
$0! = 1$

$= 6 \times 5$

$= 30$

การเรียงสับเปลี่ยน

การเรียงสับเปลี่ยนมี 2 แบบ คือ การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น และการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม



1

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

2

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น เป็นการจัดเรียงสิ่งของในแนวเส้นตรง ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 แบบ ดังนี้

1) **การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด**

จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด

โดยนำมาจัดเรียงคราวละ r สิ่ง $(0 \leq r \leq n)$ เท่ากับ $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

2) **การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด (ของซ้ำ)**

ถ้ามีสิ่งของ k กลุ่ม ซึ่งในกลุ่มที่ 1 มีของ n_1 สิ่งที่เหมือนกัน

ในกลุ่มที่ 2 มีของ n_2 สิ่งที่เหมือนกัน

$\vdots$

ในกลุ่มที่ k มีของ n_k สิ่งที่เหมือนกัน

โดยที่ $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

จะมีจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดเท่ากับ $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4

กล่องของขวัญขนาดเดียวกันมีสีต่างกัน 4 ใบ นำมาจัดวางตามแนวตั้งหรือแนวนอน จะจัดวางได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ในการจัดวางกล่องของขวัญดังกล่าว แบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี 1

จัดวางกล่องตามแนวตั้งได้

$$P_{4,4} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 24 \text{ วิธี}$$

$0! = 1$

กรณี 2

จัดวางกล่องตามแนวนอนได้

$$P_{4,4} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 24 \text{ วิธี}$$

$0! = 1$

ดังนั้น จะจัดวางกล่องของขวัญได้ทั้งหมด $24 + 24 = 48$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5

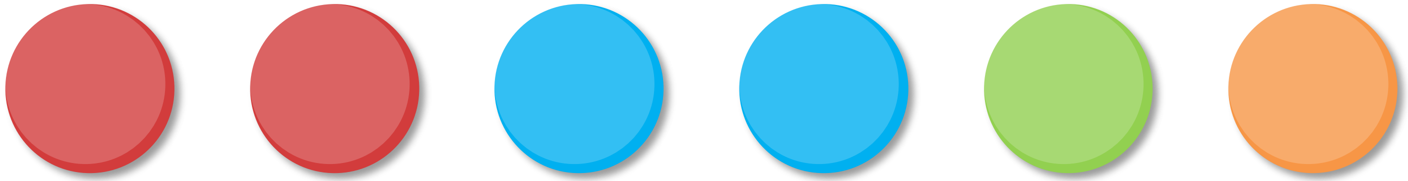
ลูกบอลขนาดเดียวกัน 6 ลูก เป็นลูกบอลสีแดง 2 ลูก สีฟ้า 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก และสีส้ม 1 ลูก ต้องการจัดเรียงลูกบอลทั้ง 6 ลูก เป็นแนวเส้นตรง โดยมีเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ลูกบอลแต่ละลูกอยู่ตำแหน่งใดก็ได้

2) ลูกบอลลูกแรกและลูกสุดท้ายต้องเป็นสีเดียวกัน

วิธีทำ ลูกบอลที่กำหนด มีกลุ่มที่ซ้ำกัน 2 กลุ่ม คือ ลูกบอลสีแดง 2 ลูก และสีฟ้า 2 ลูก

1) การจัดเรียงลูกบอลทั้ง 6 ลูก เป็นแนวเส้นตรง โดยลูกบอลแต่ละลูกอยู่ตำแหน่งใดก็ได้



จะได้ว่า
$$\frac{6!}{2!\,2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!\,2!}$$
$$= \frac{360}{2}$$
$$= 180 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น ลูกบอลทั้ง 6 ลูก จัดเรียงเป็นแนวเส้นตรง โดยลูกบอลแต่ละลูกอยู่ตำแหน่งใดก็ได้เท่ากับ 180 วิธี

ตัวอย่างที่ 5

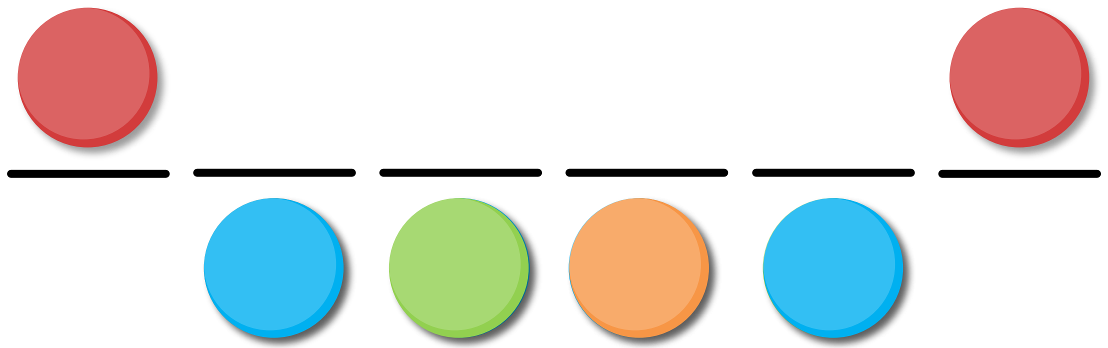
ลูกบอลขนาดเดียวกัน 6 ลูก เป็นลูกบอลสีแดง 2 ลูก สีฟ้า 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก และสีส้ม 1 ลูก ต้องการจัดเรียงลูกบอลทั้ง 6 ลูก เป็นแนวเส้นตรง โดยมีเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ลูกบอลแต่ละลูกอยู่ตำแหน่งใดก็ได้

2) ลูกบอลลูกแรกและลูกสุดท้ายต้องเป็นสีเดียวกัน

วิธีทำ 2) การจัดเรียงลูกบอลทั้ง 6 ลูก เป็นแนวเส้นตรง โดยลูกบอลลูกแรกและลูกสุดท้ายต้องเป็นสีเดียวกัน

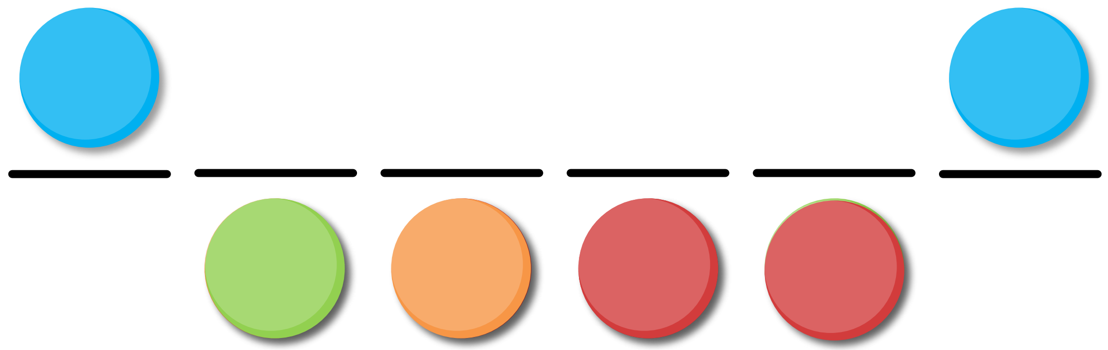
กรณีที่ 1 ลูกบอลลูกแรกและลูกสุดท้ายต้องเป็นสีแดง
จึงต้องจัดอีก 4 ตำแหน่ง



จะได้ว่า $\frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!}$

$= 12$ วิธี

กรณีที่ 2 ลูกบอลลูกแรกและลูกสุดท้ายต้องเป็นสีฟ้า
จึงต้องจัดอีก 4 ตำแหน่ง



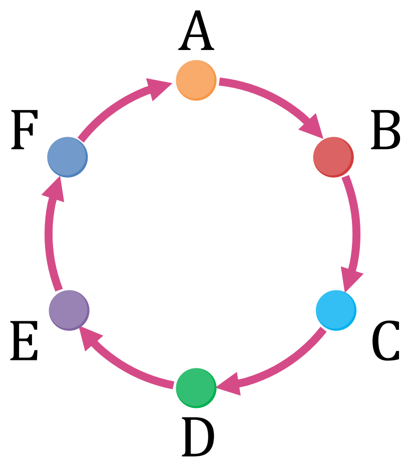
จะได้ว่า $\frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!}$

$= 12$ วิธี

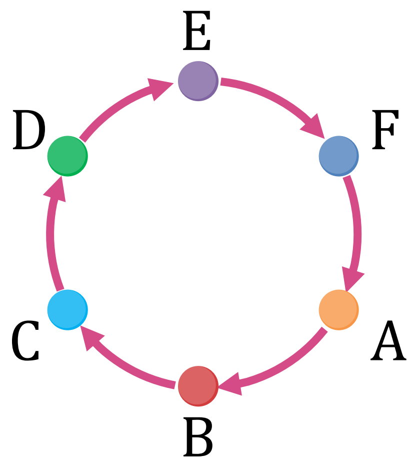
ดังนั้น ลูกบอลทั้ง 6 ลูก จัดเรียงเป็นแนวเส้นตรง โดยลูกบอลลูกแรกและลูกสุดท้ายต้องเป็นสีเดียวกันได้ทั้งหมดเท่ากับ $12 + 12 = 24$ วิธี

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม

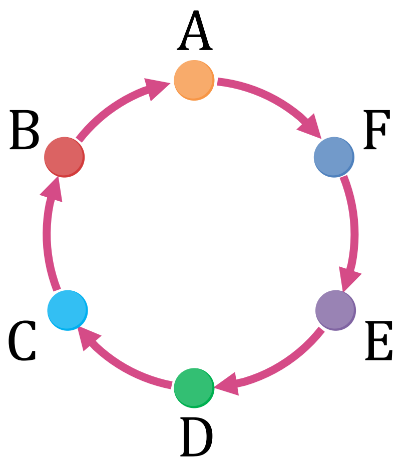
เมื่อนำสิ่งของมาจัดเรียงเป็นวงกลม ลักษณะของการจัดเรียงจะไม่มีจุดเริ่มต้นหรือจุดสุดท้าย เมื่อหมุนเปลี่ยนตำแหน่งไปทั้งชุด ก็เหมือนกับวิธีเดิม ดังนี้



วิธีที่ 1



วิธีที่ 2



วิธีที่ 3

วิธีที่ 1 กับวิธีที่ 2 จะถือว่าเหมือนกัน แต่จะต่างจากวิธีที่ 3 ในการคิดจำนวนวิธีการจัดเรียง จึงกำหนดให้สิ่งของชิ้นหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง แล้วสิ่งของชิ้นอื่นจัดเรียงสับเปลี่ยนในตำแหน่งที่เหลือ

ในวิธีที่ 1 มีสิ่งของ 6 ชิ้น นำมาจัดเรียงเป็นวงกลม เมื่อกำหนดให้ A เป็นจุดเริ่มต้น ส่วนของที่เหลือ 5 ชิ้น จะจัดเรียงสับเปลี่ยนได้ 5! วิธี

จึงสรุปได้ว่า

ถ้ามีสิ่งของ n ชิ้นที่แตกต่างกัน จัดเรียงเป็นวงกลม (แบบ 2 มิติ) ได้ $(n-1)!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6

มีนักเรียนชาย 3 คน และนักเรียนหญิง 3 คน ซึ่งมีภาคภูมิและน้ำฝนรวมอยู่ด้วย นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลม ให้หาจำนวนวิธีจัดที่นั่งตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) แต่ละคนนั่งเก้าอี้ตัวใดก็ได้

2) นักเรียนชาย 1 คน นั่งสลับกับนักเรียนหญิง 1 คน

3) ภาคภูมินั่งตรงข้ามกับน้ำฝนและภาคภูมินั่งระหว่างนักเรียนหญิง 2 คน

4) ภาคภูมิและน้ำฝนต้องนั่งแยกกัน

วิธีทำ 1) เนื่องจากแต่ละคนนั่งเก้าอี้ตัวใดก็ได้

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(6-1)! = 5!$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 120$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6

มีนักเรียนชาย 3 คน และนักเรียนหญิง 3 คน ซึ่งมีภาคภูมิและน้ำฝนรวมอยู่ด้วย นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลม ให้หาจำนวนวิธีจัดที่นั่งตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) แต่ละคนนั่งเก้าอี้ตัวใดก็ได้

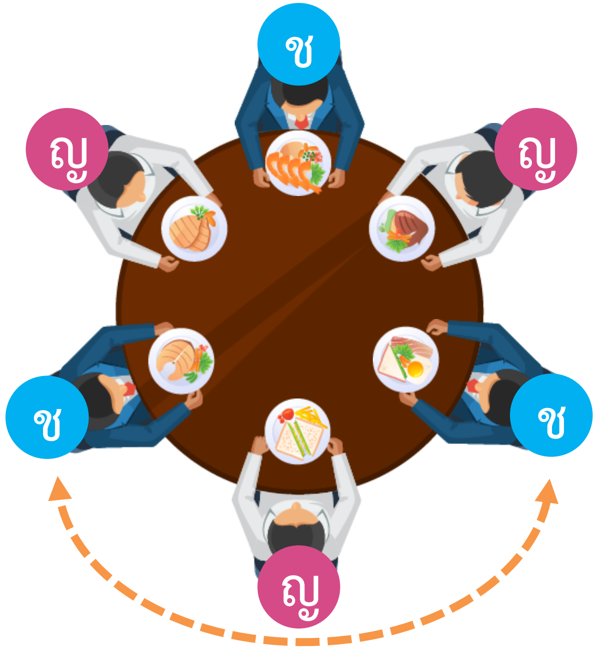
2) นักเรียนชาย 1 คน นั่งสลับกับนักเรียนหญิง 1 คน

3) ภาคภูมินั่งตรงข้ามกับน้ำฝนและภาคภูมินั่งระหว่างนักเรียนหญิง 2 คน

4) ภาคภูมิและน้ำฝนต้องนั่งแยกกัน

วิธีทำ 2) เนื่องจากนักเรียนชาย 1 คน นั่งสลับกับนักเรียนหญิง 1 คน

ให้นักเรียนชาย 1 คน เป็นจุดเริ่มต้น แล้วจัดนักเรียนชายอีก 2 คน นั่งเก้าอี้ตามตำแหน่งของนักเรียนชาย และจัดนักเรียนหญิง 3 คน นั่งเก้าอี้ตามตำแหน่งของนักเรียนหญิง



จำนวนวิธีที่จัดนักเรียนชาย 3 คน นักเรียนหญิง 3 คน

โดยนักเรียนชาย 1 คน นั่งสลับกับนักเรียนหญิง 1 คน

เขียนแทนด้วย $P_{2,2} \times P_{3,3}$

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $2!\,3! = 12$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6

มีนักเรียนชาย 3 คน และนักเรียนหญิง 3 คน ซึ่งมีภาคภูมิและน้ำฝนรวมอยู่ด้วย นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลม ให้หาจำนวนวิธีจัดที่นั่งตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) แต่ละคนนั่งเก้าอี้ตัวใดก็ได้

2) นักเรียนชาย 1 คน นั่งสลับกับนักเรียนหญิง 1 คน

3) ภาคภูมินั่งตรงข้ามกับน้ำฝนและภาคภูมินั่งระหว่างนักเรียนหญิง 2 คน

4) ภาคภูมิและน้ำฝนต้องนั่งแยกกัน

วิธีทำ 3) เนื่องจากภาคภูมิและน้ำฝนนั่งตรงข้ามกัน

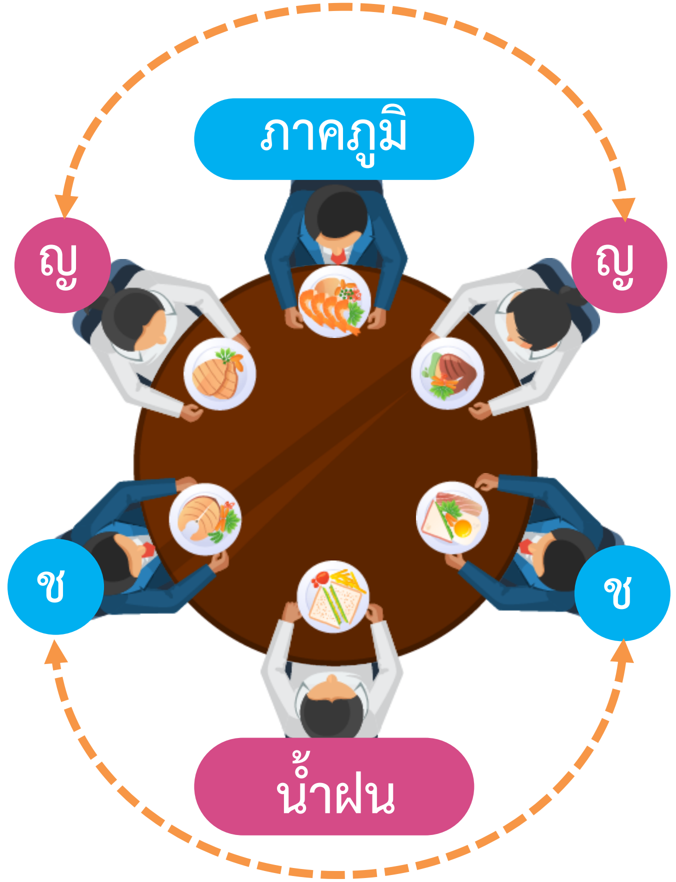
เลือกนักเรียนหญิง 2 คน นั่งข้างภาคภูมิ

จะได้ว่า $P_{2,2} = 2! = 2$ วิธี

และนักเรียนชาย 2 คนที่เหลือ จะจัดในตำแหน่งที่เหลือ 2 ตำแหน่ง

จะได้ว่า $P_{2,2} = 2! = 2$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $2 \times 2 = 4$ วิธี



มีนักเรียนชาย 3 คน และนักเรียนหญิง 3 คน ซึ่งมีภาคภูมิและน้ำฝนรวมอยู่ด้วย นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลม ให้หาจำนวนวิธีจัดที่นั่งตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) แต่ละคนนั่งเก้าอี้ตัวใดก็ได้

2) นักเรียนชาย 1 คน นั่งสลับกับนักเรียนหญิง 1 คน

3) ภาคภูมินั่งตรงข้ามกับน้ำฝนและภาคภูมินั่งระหว่างนักเรียนหญิง 2 คน

4) ภาคภูมิและน้ำฝนต้องนั่งแยกกัน

วิธีทำ 4) เนื่องจากภาคภูมิและน้ำฝนต้องนั่งแยกกัน ในการหาจำนวนวิธีจึงใช้การลบ โดยนำจำนวนวิธีที่แต่ละคนนั่งเก้าอี้ใด ๆ ลบด้วยจำนวนวิธีที่ภาคภูมิและน้ำฝนนั่งติดกัน

ให้ภาคภูมิและน้ำฝนนั่งที่จุดเริ่มต้น

แล้วให้อีก 4 คน ที่เหลือจัดในลำดับต่อไปได้ $4!$

ภาคภูมิและน้ำฝนนั่งสลับที่กันได้ $2!$

จะได้ว่า $5! - 2!\,4! = (5 \times 4!) - (2 \times 4!)$

$= (5 - 2)4!$

$= 3 \times 4! = 72$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่ภาคภูมิและน้ำฝนต้องนั่งแยกกันเท่ากับ 72 วิธี

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม 3 มิติ

ในชีวิตประจำวันมีการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมที่มีการกลับหน้าหลังได้ เรียกว่า **การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม 3 มิติ** เช่น พวงมาลัย พวงกุญแจ สร้อยคอลูกปัดหลากสี

พวงมาลัย

พวงกุญแจ

สร้อยคอลูกปัดหลากสี

ถ้ามีสิ่งของ n ชิ้นที่แตกต่างกัน จัดเรียงเป็นวงกลม (แบบ 3 มิติ) ได้ $\dfrac{(n-1)!}{2}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 7

ลูกปัดสีต่างกัน 12 ลูก นำมาร้อยเป็นกำไลข้อมือ ให้หาจำนวนกำไลข้อมือที่ร้อยได้ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ลูกปัดแต่ละลูกอยู่ตำแหน่งใดก็ได้

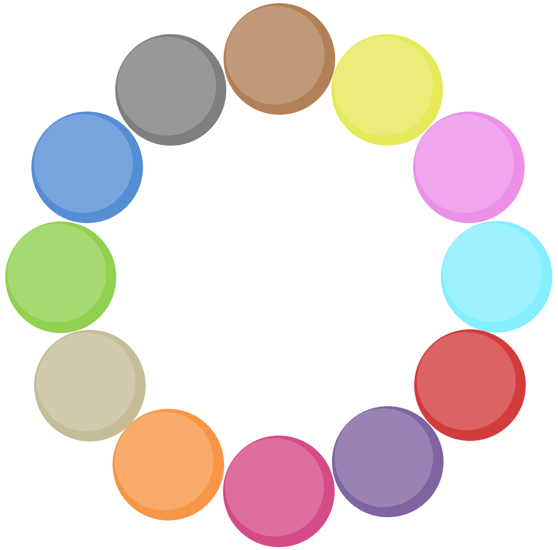
2) ลูกปัดสีแดงกับสีน้ำเงิน (เป็นลูกปัดใน 12 สี) ต้องอยู่ติดกัน

3) ลูกปัดสีเขียวกับสีน้ำเงินต้องอยู่ติดกัน แต่ไม่ติดกับสีแดง

วิธีทำ 1) เนื่องจากลูกปัดแต่ละลูกอยู่ตำแหน่งใดก็ได้

จะได้ว่า จำนวนวิธีร้อยลูกปัดที่ต่างกันทั้งหมดเท่ากับ $\frac{(12-1)!}{2} = \frac{11!}{2}$

$= 19{,}958{,}400$



ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ 19,958,400 วิธี

ตัวอย่างที่ 7

ลูกปัดสีต่างกัน 12 ลูก นำมาร้อยเป็นกำไลข้อมือ ให้หาจำนวนกำไลข้อมือที่ร้อยได้ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ลูกปัดแต่ละลูกอยู่ตำแหน่งใดก็ได้

2) ลูกปัดสีแดงกับสีน้ำเงิน (เป็นลูกปัดใน 12 สี) ต้องอยู่ติดกัน

3) ลูกปัดสีเขียวกับสีน้ำเงินต้องอยู่ติดกัน แต่ไม่ติดกับสีแดง

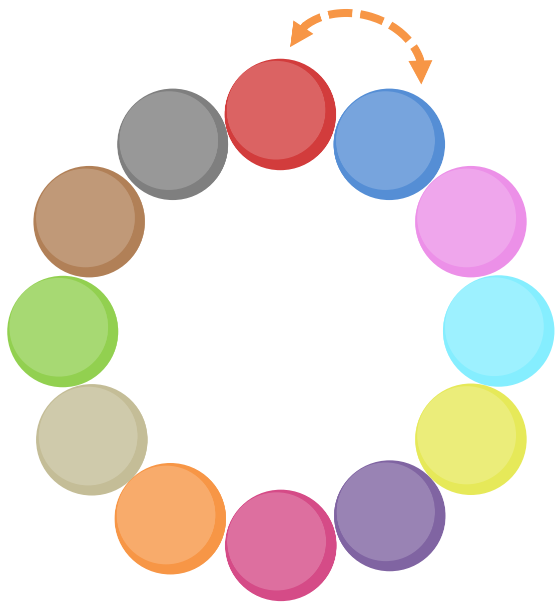
<u>วิธีทำ</u> 2) เนื่องจากลูกปัดสีแดงและสีน้ำเงินต้องอยู่ติดกัน

จึงให้ลูกปัดสีแดงและสีน้ำเงินเป็นจุดเริ่มต้น

แล้วร้อยลูกปัดสีอื่น ๆ อีก 10 ตำแหน่ง จะได้ 10! วิธี

ลูกปัดสีแดงและสีน้ำเงินสลับที่กัน จะได้ 2! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $\frac{10!\,2!}{2} = 3{,}628{,}800$ วิธี



ตัวอย่างที่ 7

ลูกปัดสีต่างกัน 12 ลูก นำมาร้อยเป็นกำไลข้อมือ ให้หาจำนวนกำไลข้อมือที่ร้อยได้ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ลูกปัดแต่ละลูกอยู่ตำแหน่งใดก็ได้

2) ลูกปัดสีแดงกับสีน้ำเงิน (เป็นลูกปัดใน 12 สี) ต้องอยู่ติดกัน

3) ลูกปัดสีเขียวกับสีน้ำเงินต้องอยู่ติดกัน แต่ไม่ติดกับสีแดง

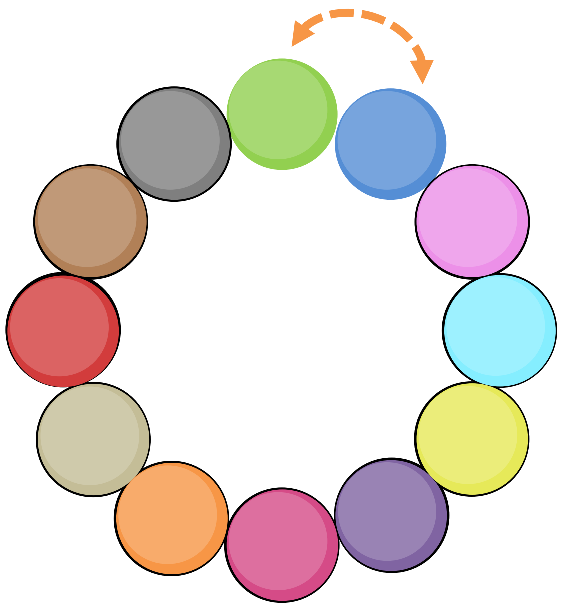
วิธีทำ 3) เนื่องจากลูกปัดสีเขียวและสีน้ำเงินต้องอยู่ติดกัน

จึงให้ลูกปัดสีเขียวและสีน้ำเงินเป็นจุดเริ่มต้น

ร้อยลูกปัดสีแดงในตำแหน่งที่ไม่ติดกับสีเขียวและสีน้ำเงินได้ 8 ตำแหน่ง

แล้วร้อยลูกปัดสีอื่น ๆ จะได้ 9! วิธี ลูกปัดสีเขียวและสีน้ำเงินสลับที่กันได้ 2! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $\frac{8 \times 2!\,9!}{2} = 2,903,040$ วิธี



การจัดหมู่

การจัดหมู่เป็นการเลือกกลุ่มของสิ่งของ โดยไม่พิจารณาลำดับในการเลือก ดังนั้น การหยิบก่อนหลังหรือการสลับตำแหน่ง จะถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน เช่น

จำนวนวิธีการจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยเลือกคราวละ r สิ่ง $(0 \leq r \leq n)$ เท่ากับ $C_{n,r}$ หรือ $\binom{n}{r}$ วิธี

เมื่อ $C_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

ตัวอย่างที่ 8

ให้หาค่าของ $C_{12,\,3}$

วิธีทำ จาก $C_{n,\,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

พิจารณา $C_{12,\,3}$ จะได้ $n = 12$ และ $r = 3$

$$C_{12,\,3} = \frac{12!}{(12-3)!\,3!}$$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!\,3!}$$

$$= 220$$

ดังนั้น $C_{12,\,3}$ มีค่าเท่ากับ 220

ตัวอย่างที่ 9

ให้หาค่า n ของ $C_{n,5} = 1$

วิธีทำ จาก

$$C_{n,5} = 1$$

จะได้

$$\frac{n!}{(n-5)!\,5!} = 1$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!\,5!} = 1$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$n = 5$$

ดังนั้น $n = 5$

ตัวอย่างที่ 10

ถ้าต้องการเลือกหมวก 5 ใบ จากหมวกที่มีสีแตกต่างกันทั้งหมด 12 ใบ จะเลือกได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> จำนวนวิธีเลือกหมวก 5 ใบ จาก 12 ใบ เท่ากับ $\binom{12}{5}$

จะได้ว่า
$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{(12-5)!\,5!}$$
$$= \frac{12!}{7!\,5!}$$
$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!\,5!}$$
$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= 792$$

ดังนั้น จะเลือกหมวกได้ทั้งหมดเท่ากับ 792 วิธี

สมบัติของการจัดหมู่

สมบัติของการจัดหมู่ กำหนด r และ n เป็นจำนวนเต็มที่ $0 \leq r \leq n$

1. $P_{n,r} = C_{n,r} \times r!$

2. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

4. $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

5. $\binom{n}{r} = \binom{n}{k}$ ถ้า $r + k = n$ เมื่อ $0 \leq k \leq n$

6. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

7. $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n - 1$

ตัวอย่างที่ 11

ให้หาค่าของ $\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}$

<u>วิธีทำ</u> $\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}$

จากสมบัติของการจัดหมู่ข้อ 3.

$$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$$

จะได้ว่า $\binom{7}{1}=\binom{7}{6}$

ดังนั้น $\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7} = 2\left[\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}\right]+\binom{7}{7}$

$= 2(7+21+35)+1$

$= 2(63)+1$

$= 127$

ตัวอย่างที่ 12

ให้หาจำนวนวิธีเลือกดอกไม้ 5 ชนิด จากดอกไม้สีแดง 6 ชนิด และดอกไม้สีขาว 4 ชนิด โดยมีเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

2) ต้องมีดอกไม้สีขาว 1 ชนิดเท่านั้น

3) ต้องมีดอกไม้สีขาวอย่างน้อย 2 ชนิด

วิธีทำ 1) เนื่องจากไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

จะได้ว่า จำนวนวิธีเลือกดอกไม้ 5 ชนิด เท่ากับ $\binom{10}{5}$

$$= \frac{10!}{(10-5)!\,5!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!\,5!}$$

$$= \frac{30{,}240}{120}$$

$$= 252$$

เลือก 5 ชนิด

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกดอกไม้ 5 ชนิด เท่ากับ 252 วิธี

ตัวอย่างที่ 12

ให้หาจำนวนวิธีเลือกดอกไม้ 5 ชนิด จากดอกไม้สีแดง 6 ชนิด และดอกไม้สีขาว 4 ชนิด โดยมีเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

2) ต้องมีดอกไม้สีขาว 1 ชนิดเท่านั้น

3) ต้องมีดอกไม้สีขาวอย่างน้อย 2 ชนิด

วิธีทำ 2) เนื่องจากเลือกดอกไม้สีขาว 1 ชนิด จากดอกไม้สีขาว 4 ชนิด

จะได้ว่า จำนวนวิธีเลือกดอกไม้ 5 ชนิด เท่ากับ $\binom{4}{1}\binom{6}{4}$

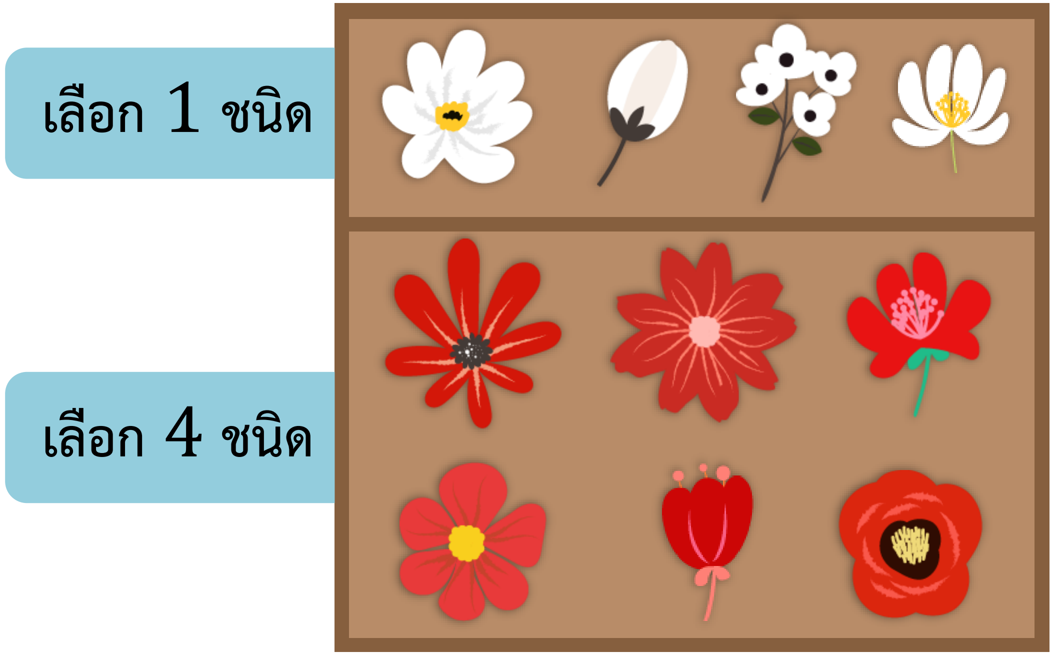
$$= 4 \times \frac{6!}{(6-4)!\,4!}$$

$$= 4 \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{2!\,4!}$$

$$= 4 \times 15$$

$$= 60$$

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกดอกไม้ 5 ชนิด เท่ากับ 60 วิธี



ตัวอย่างที่ 12

ให้หาจำนวนวิธีเลือกดอกไม้ 5 ชนิด จากดอกไม้สีแดง 6 ชนิด และดอกไม้สีขาว 4 ชนิด โดยมีเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

2) ต้องมีดอกไม้สีขาว 1 ชนิดเท่านั้น

3) ต้องมีดอกไม้สีขาวอย่างน้อย 2 ชนิด

วิธีทำ 3) เนื่องจากต้องมีดอกไม้สีขาวอย่างนี้ 2 ชนิด

แสดงว่า จะต้องมีกรณีที่เลือกดอกไม้สีขาวจำนวน 2 ชนิด 3 ชนิด และ 4 ชนิด

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกดอกไม้สีขาวอย่างน้อย 2 ชนิด เท่ากับ จำนวนวิธีทั้งหมดลบด้วยจำนวนวิธีที่เลือกดอกไม้สีขาว 1 ชนิด

จะได้ว่า จำนวนวิธีเลือกดอกไม้ 5 ชนิด เท่ากับ $\binom{10}{5} - \left[\binom{4}{1}\binom{6}{4}\right]$

$= 252 - 60$

$= 192$

อย่างน้อย 2 ชนิด

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกดอกไม้ 5 ชนิด เท่ากับ 192 วิธี

ทฤษฎีบททวินาม

ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n, r เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

เรียก $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ ว่า **สัมประสิทธิ์ทวินาม**

ข้อสรุปสำคัญ

- $(a+b)^n$ กระจายได้ $n+1$ พจน์
- พจน์ทั่วไปของทฤษฎีบททวินาม คือ $T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ เรียก $\binom{n}{r}$ ว่า สัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ที่ $r+1$
- เมื่อนำสัมประสิทธิ์ทวินามมาเรียงตามพจน์ จะได้รูปสามเหลี่ยมปาสกาล

ตัวอย่างที่ 13

ให้กระจาย $(x-2y)^5$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

วิธีทำ จัดรูป $(x-2y)^5$ เพื่อให้เป็นไปตามทฤษฎีบททวินาม

$$(x-2y)^5 = [x+(-2y)]^5$$

$$= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4(-2y) + \binom{5}{2}x^3(-2y)^2 + \binom{5}{3}x^2(-2y)^3 + \binom{5}{4}x(-2y)^4 + \binom{5}{5}(-2y)^5$$

$$= x^5 + 5x^4(-2y) + 10x^3(-2y)^2 + 10x^2(-2y)^3 + 5x(-2y)^4 + (-2y)^5$$

$$= x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$

ตัวอย่างที่ 14

ให้หาสัมประสิทธิ์ของ x^2 จากการกระจาย $(3x+2)^5$

วิธีทำ จากสูตร $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

จะได้ว่า $T_{r+1} = \binom{5}{r} (3x)^{5-r} 2^r$

จากโจทย์หาสัมประสิทธิ์ของ x^2

ดังนั้น $5 - r = 2$ จะได้ $r = 3$

นั่นคือ $T_{3+1} = \binom{5}{3} (3x)^{5-3} 2^3$

$$= \binom{5}{3} 3^2x^2 2^3$$

$$= 720x^2$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^2 คือ 720

ตัวอย่างที่ 15

ให้ใช้ทฤษฎีบททวินามหาค่าของ $(2.15)^4$ (ตอบเป็นทศนิยม 4 ตำแหน่ง)

วิธีทำ จาก $(2.15)^4 = (2+0.15)^4$

จะได้ว่า $n = 4,\ a = 2$ และ $b = 0.15$

จากทฤษฎีบททวินาม

ดังนั้น $(2+0.15)^4 = 2^4 + \binom{4}{1}2^3(0.15) + \binom{4}{2}2^2(0.15)^2 + \binom{4}{3}2(0.15)^3 + \binom{4}{4}(0.15)^4$

$$= 16 + 4(8)(0.15) + 6(4)(0.15)^2 + 4(2)(0.15)^3 + (0.15)^4$$

$$\approx 21.3675$$

นักเรียนจำคำถามในตอนต้นได้ไหมครับ

“ในการแข่งขันฟุตบอลลีกของประเทศหนึ่ง ผู้จัดการแข่งขันจะต้องจัดตารางให้แต่ละสโมสรพบกันหมด ซึ่งมีจำนวนสโมสรเข้าร่วมการแข่งขันทั้งหมด 18 สโมสร”

จากข้อความข้างต้น นักเรียนสามารถจัดตารางการแข่งขันฟุตบอลลีกได้อย่างไร ?

ตัวอย่างที่ 16

ในการแข่งขันฟุตบอลลีกของประเทศหนึ่ง ผู้จัดการแข่งขันจะต้องจัดตารางให้แต่ละสโมสรพบกันหมด ซึ่งมีจำนวนสโมสรเข้าร่วมการแข่งขันทั้งหมด 18 สโมสร จะสามารถจัดตารางการแข่งขันฟุตบอลได้ ดังนี้

วิธีทำ เนื่องจากการแข่งขันจะต้องให้แต่ละสโมสรพบกันหมด

จะได้ว่า

$$\binom{18}{2} = \frac{18!}{(18-2)!\,2!} = \frac{18!}{16!\,2!} = \frac{18 \times 17 \times 16!}{16!\,2!} = \frac{306}{2} = 153$$

ดังนั้น สามารถจัดตารางการแข่งขันฟุตบอลได้ทั้งหมดเท่ากับ 153 วิธี

นักเรียนได้รับความรู้เรื่อง “หลักการนับเบื้องต้น” อย่างครบถ้วนแล้ว
หวังว่านักเรียนจะนำความรู้ไปใช้ในชีวิตประจำวันได้นะครับ