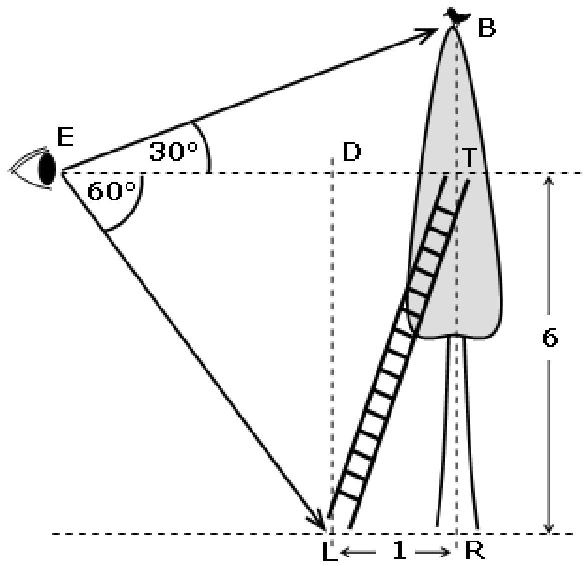
เอกสารประกอบการเรียน

วิชาคณิตศาสตร์ก้าวหน้า 2 (ค23204)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3/.......



ชื่อ-นามสกุล.. เลขที่...........

โรงเรียนสุราษฎร์พิทยา

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานี ชุมพร

ผลการเรียนรู้

วิชา คณิตศาสตร์ก้าวหน้า 2 รหัสวิชา ค23204 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2

1. พิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติได้

2. หาค่าเอกลักษณ์ของตรีโกณมิติเมื่อกำหนดมุมต่างๆมาให้ได้

3. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

4. แก้โจทย์ปัญหาโดยใช้กฎของไซน์(Sine Law) ได้

5. แก้โจทย์ปัญหาโดยใช้กฎของโคไซน์(Cosine Law) ได้

ตรีโกณมิติขั้นสูง

ตรีโกณมิติเป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมในรูปสามเหลี่ยม คำว่า “ตรีโกณมิติ” เป็นคำศัพท์ในภาษากรีก ซึ่งเกิดจากคำว่า “รูปสามเหลี่ยม” (trigono) และ “การวัด” (metro) ถึงแม้ว่าชาวกรีกในสมัยโบราณได้ใช้ตรีโกณมิติในการศึกษาดาราศาสตร์ ตรีโกณมิติมีความเป็นมาเก่าแก่กว่านั้น กล่าวคือ ชาวอิยิปต์ได้ใช้ตรีโกณมิติพื้นฐานในการคำนวณเพื่อสร้างพีระมิด ตรีโกณมิติที่ใช้ในปัจจุบันมีความแตกต่างกับตรีโกณมิติที่ใช้ในสมัยโบราณตรงที่มีการใช้ฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับมุม ซึ่งคือ ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีสมบัติและสามารถประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง ในภาคเรียนนี้เราจะศึกษาสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ใช้ เพื่อแก้ปัญหาเรขาคณิต

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ คือ รูปแบบของสมการตรีโกณมิติที่เป็นจริงทุกค่าของมุมหรือจำนวนจริงที่ปรากฏในฟังก์ชันนั้น

หลักในการพิสูจน์เอกลักษณ์

1. พิสูจน์ข้างใดข้างหนึ่งให้ตรงกับอีกข้างหนึ่ง (ให้เลือกเอาด้านที่ซับซ้อนมาพิสูจน์)
2. ควรจัดทุกฟังก์ชันให้มาอยู่ในรูปของ sin หรือ cos ก่อน
3. นำเอกลักษณ์ที่พิสูจน์ไว้แล้วมาเลือกใช้
4. เอกลักษณ์พื้นฐานที่นำมาช่วยอ้างอิงในการพิสูจน์เอกลักษณ์ มีดังนี้

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2) $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$

3) $\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \dfrac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}$

พิสูจน์ $\tan^2\theta - \sin^2\theta =$ ....

=..

=..

=..

=..

ตอบ..

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ $\dfrac{\cot\theta}{\tan\theta+\cot\theta}=\cos^2\theta$

พิสูจน์ $\dfrac{\cot\theta}{\tan\theta+\cot\theta}=$ ....

=..

=..

=..

=..

ตอบ..

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ $\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\tan\theta-\sin\theta\cos\theta}=2\cot^2\theta$

พิสูจน์ $\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\tan\theta-\sin\theta\cos\theta}=$ ....

=..

=..

=..

=..

ตอบ..

ตัวอย่างที่ 4 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ $\frac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}+1=\csc\theta$

พิสูจน์ $\frac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}+1=$ ....

=..

=..

=..

ตอบ..

ตัวอย่างที่ 5 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\csc\theta$

พิสูจน์ $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=$ ....

=..

=..

=..

=..

=..

ตอบ..

ใบงานที่ 1

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

1. $\csc\theta\cos\theta=\cot\theta$

....

....

....

....

2. $1+\tan^2(-\theta)=\sec\theta$

....

....

....

....

....

3. $\cos\theta(\tan\theta+\cot\theta)=\csc\theta$

....

....

....

....

....

4. $\tan\theta\cot\theta-\cos^2\theta=\sin^2\theta$

....

....

....

....

....

5. $(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)=\tan^2\theta$

....

....

....

....

....

ผลบวกและผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
2. $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
3. $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
4. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)$

วิธีทำ $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)$ =..

=..

=..

ตอบ..

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $\sin 15^\circ$

วิธีทำ $\sin 15^\circ$ =..

=..

=..

=..

ตอบ..

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $\cos 75^\circ$

วิธีทำ $\cos 75^\circ$ =..

=..

=..

=..

=..

ตอบ..

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ $\cos(180^\circ - \theta)$

วิธีทำ $\cos(180^\circ - \theta)$ =..

=..

=..

ตอบ..

ใบงานที่ 2

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

1. $\sin 75^\circ$

....

....

....

....

....

2. $\cos 15^\circ$

....

....

....

....

....

3. $\sin 105^\circ$

....

....

....

....

....

4. $\cos 105^\circ$

....

....

....

....

....

5. $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$

....

....

....

6. $\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$

7. $\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)$

8. $\cos(180^\circ + \theta)$

9. $\sin(360^\circ - \theta)$

10. $\cos(90^\circ + \theta)$

ผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. $2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$
2. $2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$
3. $2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$
4. $2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าของ $2\sin 5x\cos 3x$

วิธีทำ $2\sin 5x\cos 3x$ =..

=..

ตอบ...

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าของ $2\cos 3x\sin x$

วิธีทำ $2\cos 3x\sin x$ =..

=..

ตอบ...

ตัวอย่างที่ 12 จงหาค่าของ $8\cos 10x\cos 6x$

วิธีทำ $8\cos 10x\cos 6x$ =..

=..

=..

ตอบ..

ตัวอย่างที่ 13 จงหาค่าของ $3\sin 5t\sin 2t$

วิธีทำ $3\sin 5t\sin 2t$ =..

=..

=..

ตอบ..

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่าของ $\sin 2x\cos 8x$

วิธีทำ $\sin 2x\cos 8x$ =..

=..

=..

=..

ตอบ..

ใบงานที่ 3

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

1. $2\sin 3\theta \cos \theta$

....

....

....

....

....

2. $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

....

....

....

....

....

3. $2\cos 5x \sin 3x$

....

....

....

....

....

4. $2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

....

....

....

....

....

5. $-2\cos 4x \sin 2x$

....

....

....

....

....

6. $-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

7. $4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

8. $-4\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

9. $\cos 165^{\circ}\sin 75^{\circ}$

10. $\cos 255^{\circ}\cos 15^{\circ}$

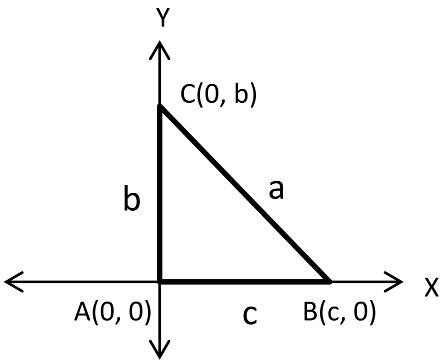
เรื่อง กฎของไซน์

กฎของไซน์ เป็นกฎที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมใดๆ เมื่อกำหนดมุม 2 มุม และด้านที่อยู่ระหว่างมุมทั้งสองมาให้ สามารถใช้กฎของไซน์หามุมและด้านที่เหลือ รวมทั้งใช้หาพื้นที่ของสามเหลี่ยมรูปนั้นได้

กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใดๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , B และ C ตามลำดับ จะได้

$$\frac{sinA}{a}=\frac{sinB}{b}=\frac{sinC}{c} \quad \textbf{หรือ} \quad \frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$$

การหาพื้นที่สามเหลี่ยมใดๆ โดยใช้กฎของไซน์ (กรณีมุม A อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน)



พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2}bc\ sinA$

ถ้ามุม B และ C อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน จะได้สูตรว่า

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2}ac\ sinB$

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2}ab\ sinC$

ใบงานที่ 4

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน

1. กำหนด ΔABC จงหาด้าน a และ b เมื่อ $c = \sqrt{2}$, $A = 60°$ และ $B = 45°$

....

....

....

....

2. กำหนด ΔABC จงหาด้านและมุมที่เหลือ เมื่อ $C = 60°$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 3\sqrt{2}$

....

....

....

....

3. จงหาพื้นที่ ΔABC เมื่อกำหนดให้ $B = 60°$, $a = 14$, $c = 12$

....

....

....

....

4. จงหาพื้นที่ ΔABC เมื่อกำหนดให้ $A = 150°$, $\mathrm{b} = 6$, $c = 8$

....

....

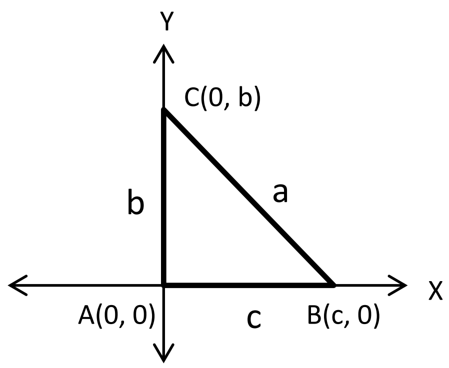
....

....

เรื่อง กฎของโคไซน์

กฎของโคไซน์ เป็นกฎที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้ากำหนดด้าน 2 ด้านและมุมระหว่างด้านทั้งสองมาให้ สามารถใช้กฎของโคไซน์หาความยาวด้านและมุมที่เหลือได้ หรือถ้ากำหนดด้านทั้งสามด้านมาให้ สามารถใช้กฎของโคไซน์หามุมทั้งสามของสามเหลี่ยมใดๆ ได้

กฎของโคไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใดๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , B และ C ตามลำดับ จะได้



1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA$

2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB$

3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC$

ใบงานที่ 5

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน

1. จงหาความยาวของด้าน a เมื่อ $b = 2$, $c = \sqrt{2}$ และ $A = 45^\circ$

....

....

....

....

2. จงหาความยาวของด้าน c เมื่อ $a = 8$, $b = 10$ และ $C = 120^\circ$

....

....

....

....

3. จงหาขนาดของมุม B เมื่อ $a = 3$, $b = 4$ และ $c = 5$

....

....

....

....

4. จงหาขนาดของมุมทั้งสาม เมื่อ $a = 8$, $b = 6$ และ $c = 6$

....

....

....

....

ใบงานที่ 6

เรื่อง กฎของไซน์และกฎของโคไซน์

1. จงหา a ถ้า $b = 20$, $c = 30$ และ $A = 60°$

....

....

....

2. จงหา B ถ้า $a = 25$, $b = 75$ และ $c = 60$

....

....

....

3. จงหา b เมื่อ $C = 45°$, $B = 60°$, $c = \sqrt{6}$

....

....

....

4. จงหา b , c เมื่อ $B = 105°$, $C = 60°$, $a = 4$

....

....

....

5. จงหาพื้นที่ ΔABC เมื่อ $A = 60°$, $b = 3$, $c = 5$

....

....

....