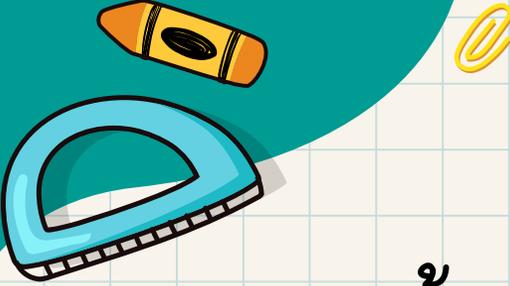


บทที่ 4

การแปลงทางเรขาคณิต

Hello.
My student.





เนื้อหา

ของบทเรียน



4.1 การเลื่อนขนาน



4.2 การสะท้อน



4.3 การหมุน

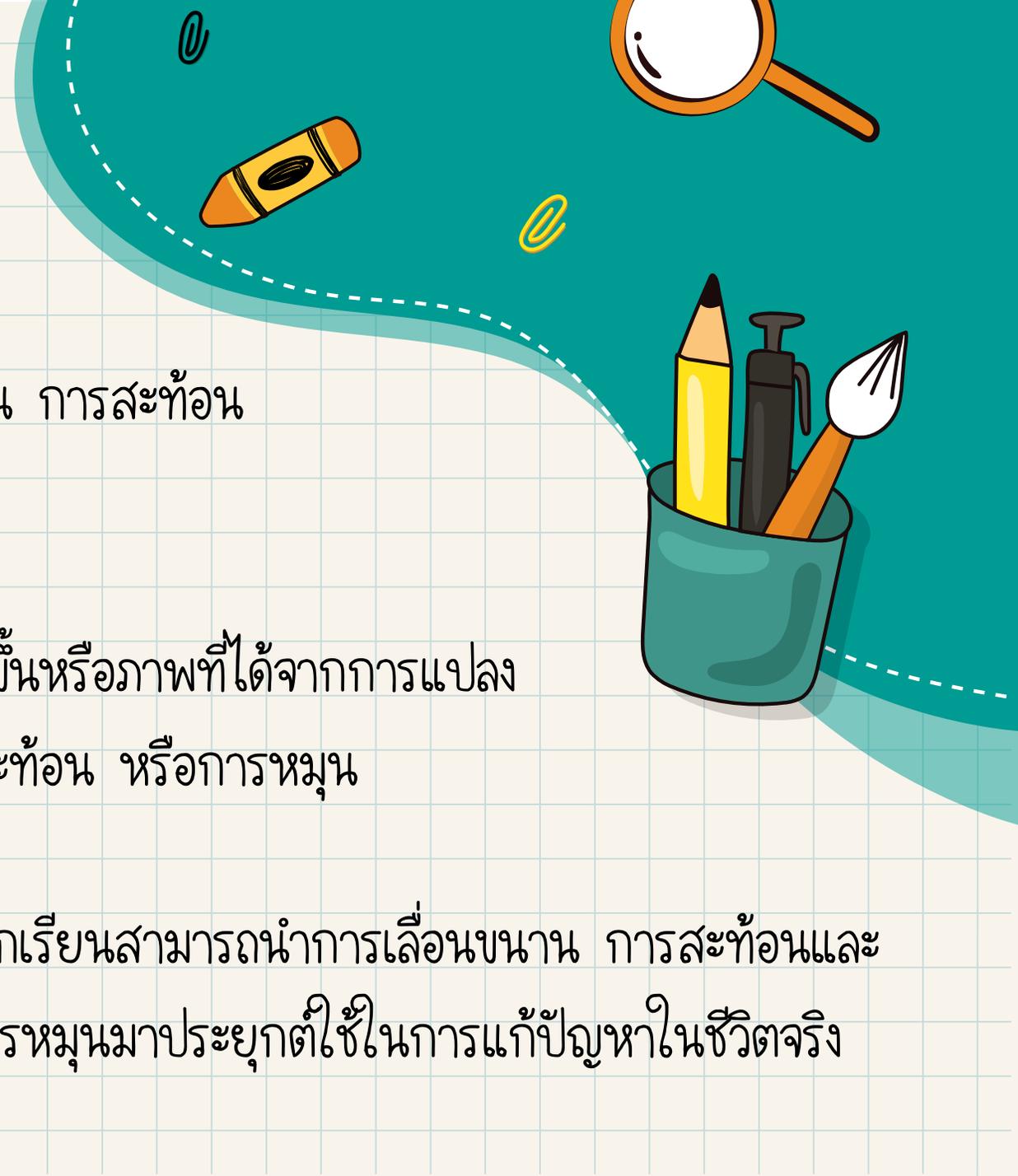


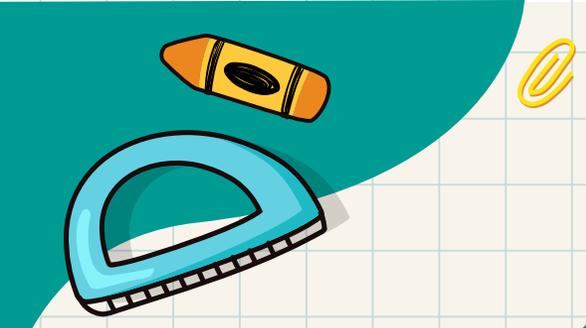
จุดประสงค์ของบทเรียน

1. นักเรียนสามารถอธิบายผลที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลง การสะท้อน และการหมุนรูปต้นแบบบนระนาบ

2. นักเรียนสามารถอธิบายสิ่งที่เกิดขึ้นหรือภาพที่ได้จากการแปลงว่าเกิดจากการเปลี่ยนแปลง การสะท้อน หรือการหมุน

3. นักเรียนสามารถนำการเปลี่ยนแปลง การสะท้อนและการหมุนมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง



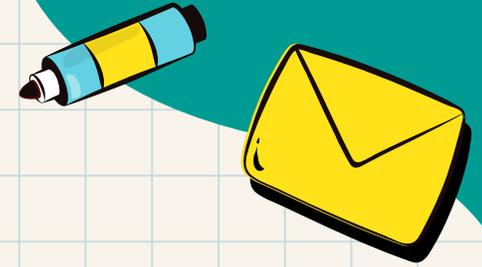
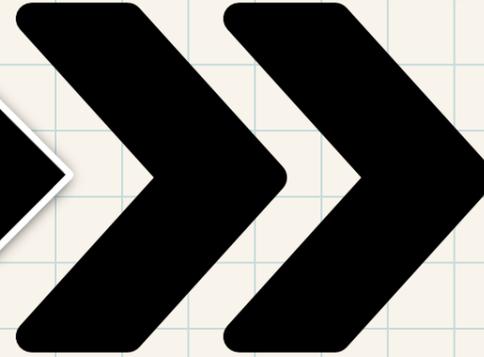


การแปลง

จุดทุกจุดของวัตถุที่อยู่ที่เดิม (หรือขนาดเดิม)
จะต้องมีการส่งไปยังวัตถุที่ตำแหน่งใหม่
(หรือขนาดใหม่) ทุกจุด จุดต่อจุด



การแปลงทางเรขาคณิต (geometric transformation)

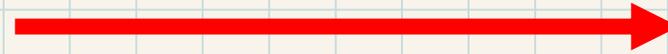


รูปต้นแบบ
(pre - image)

ภาพที่ได้จากการแปลง
(image)



จุด P



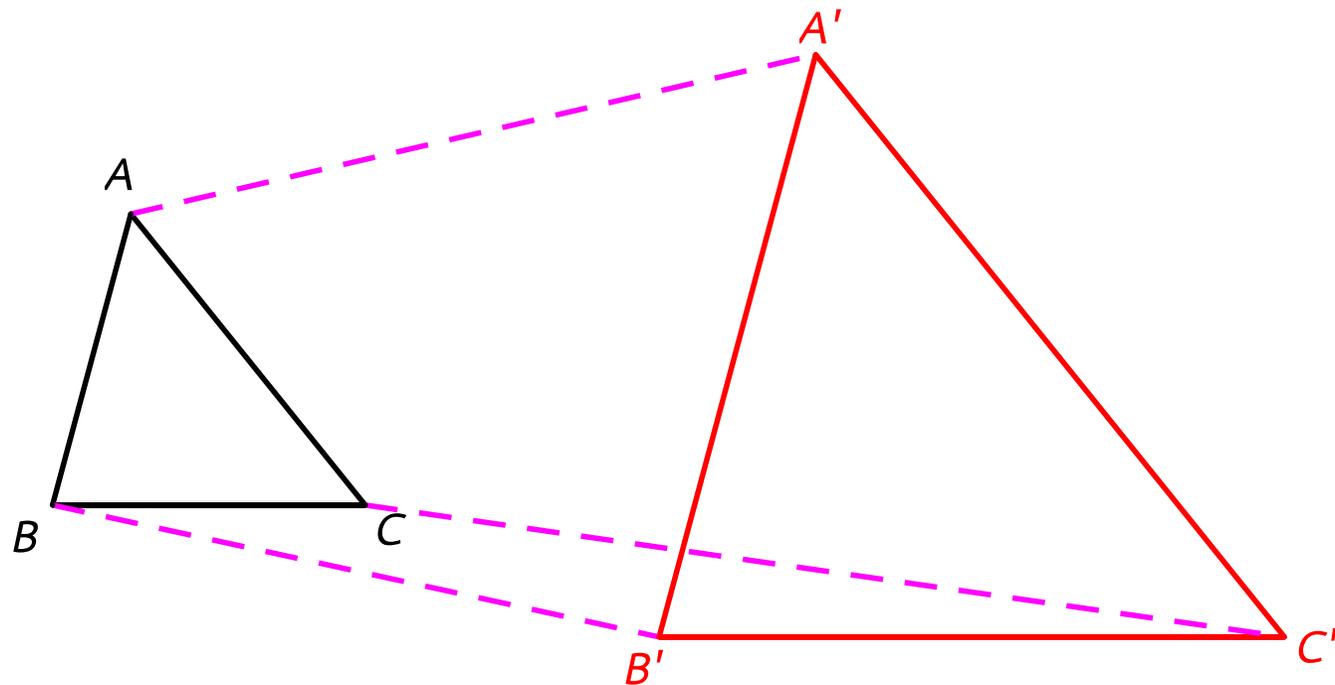
จุด P'

จุดที่สมนัยกัน

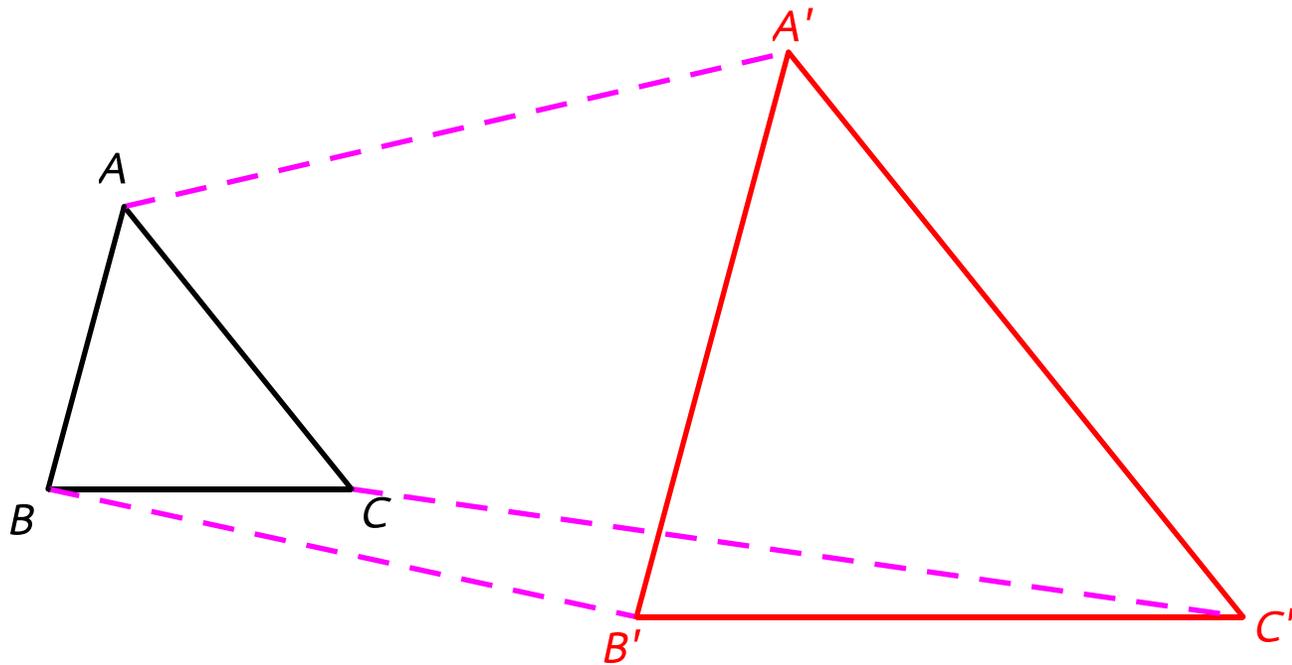
อ่านว่า
พีไพร์ม



กำหนดให้ $\Delta A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการแปลง ΔABC



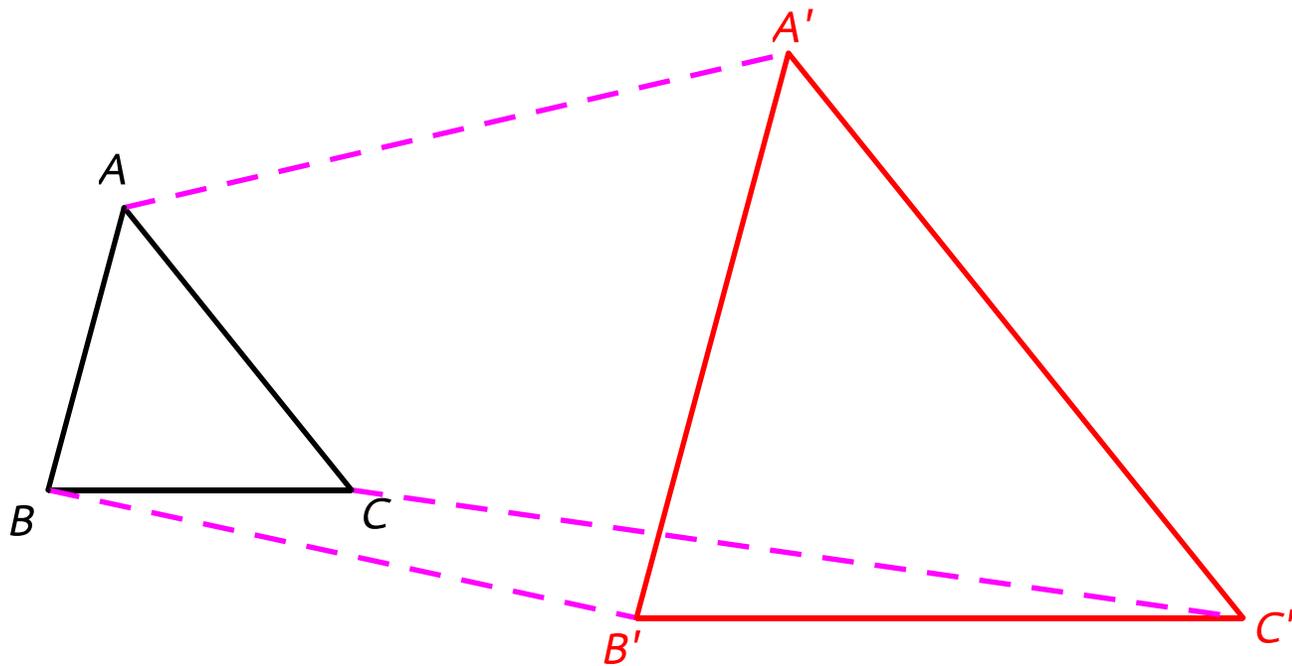
กำหนดให้ $\Delta A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการแปลง ΔABC



จุดที่สมนัย



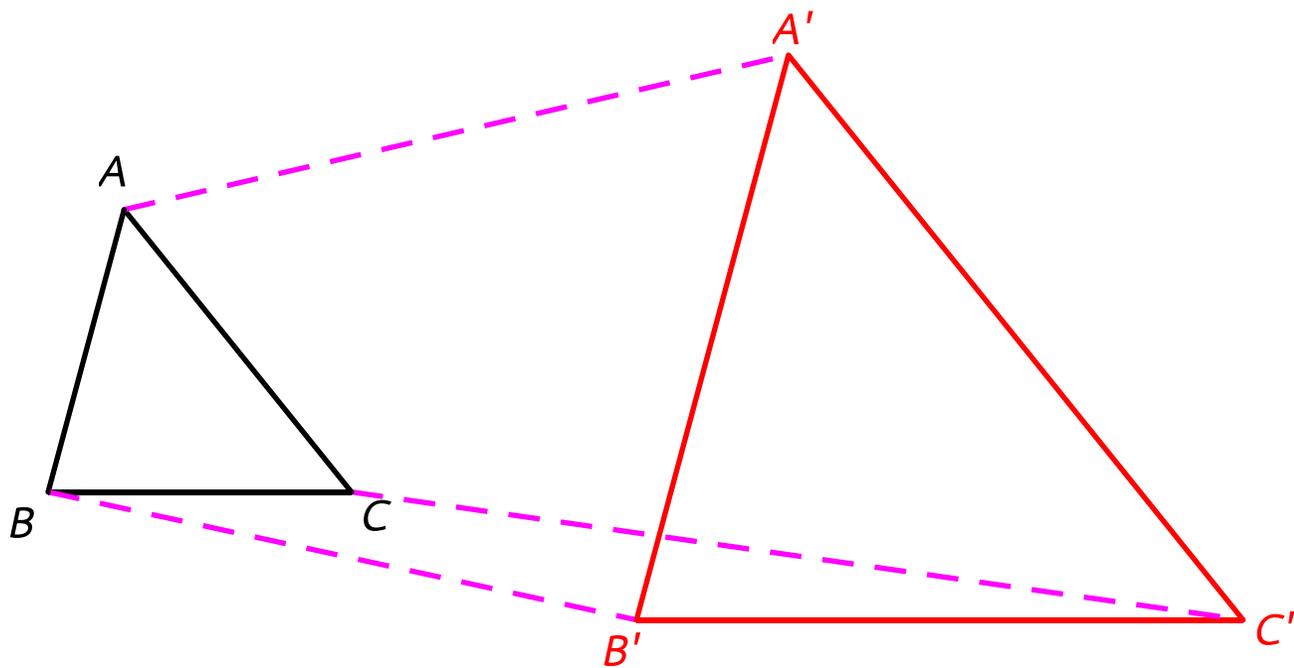
กำหนดให้ $\triangle A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการแปลง $\triangle ABC$



ด้านที่สมนัย



กำหนดให้ $\Delta A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการแปลง ΔABC

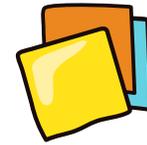


มุมที่สมนัย

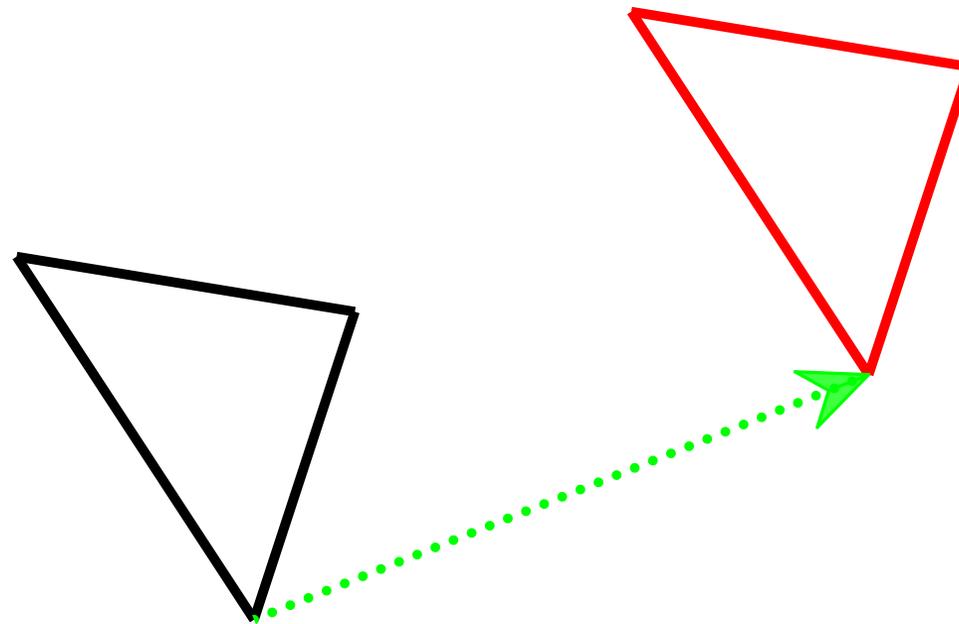


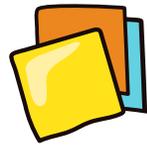


การแปลงทางเรขาคณิต 4 แบบ

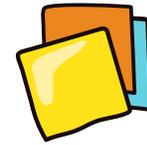


แบบที่ 1 การแปลงที่เป็นการเลื่อนขนาน

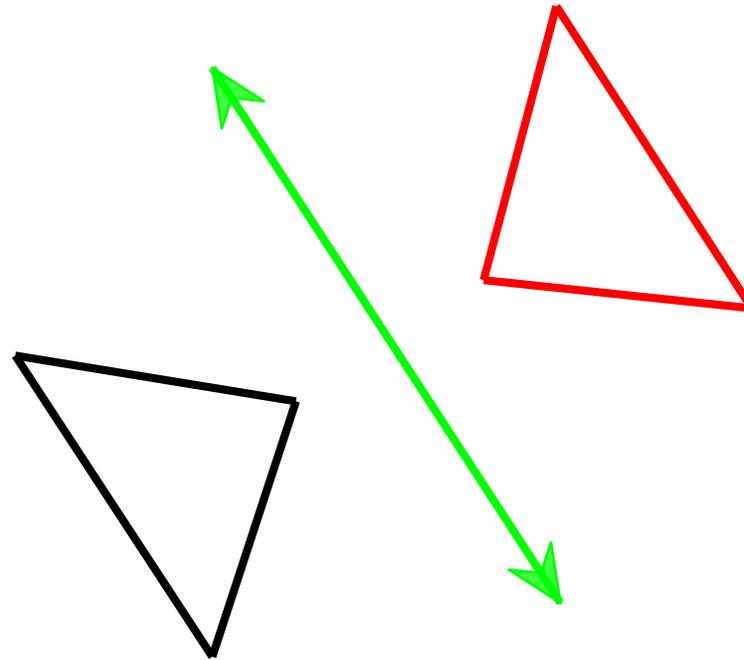


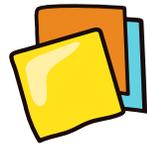


การแปลงทางเรขาคณิต 4 แบบ

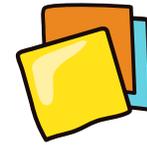


แบบที่ 2 การแปลงที่เป็นการสะท้อน

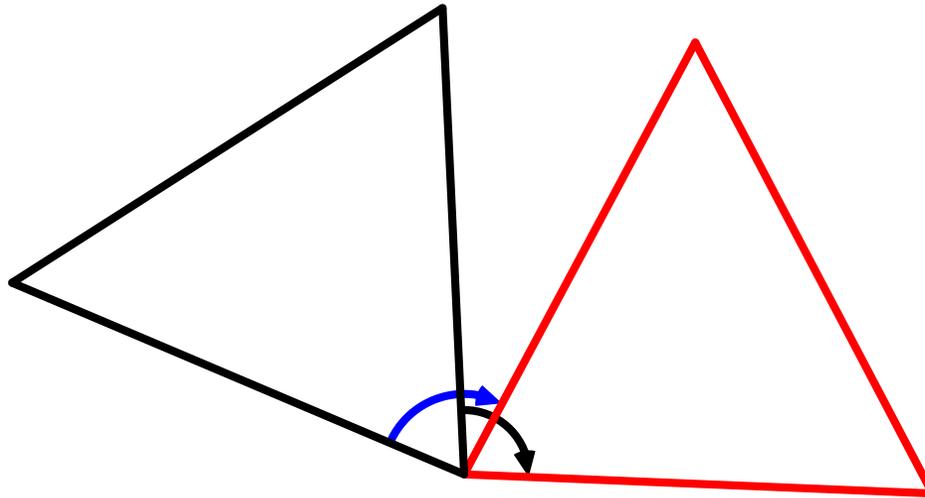




การแปลงทางเรขาคณิต 4 แบบ



แบบที่ 3 การแปลงที่เป็นการหมุน

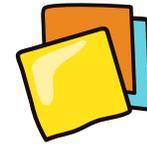


การแปลงทางเรขาคณิตทั้งการเลื่อน การสะท้อน และการหมุน จะให้ภาพที่มีรูปร่างเหมือนกันและขนาดเดียวกันกับรูปต้นแบบเสมอ

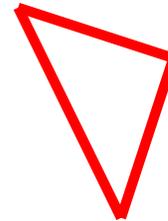
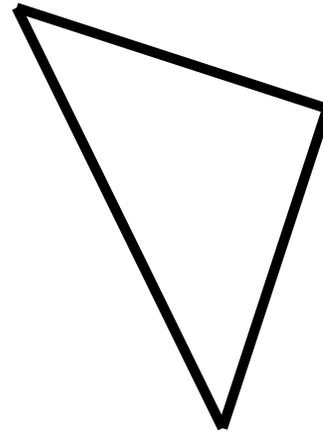
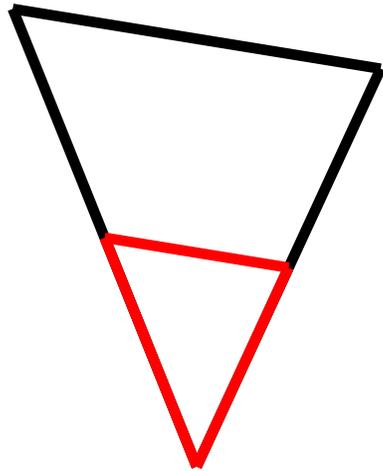




การแปลงทางเรขาคณิต 4 แบบ



แบบที่ 4 การแปลงที่เป็นการย่อ/ขยาย

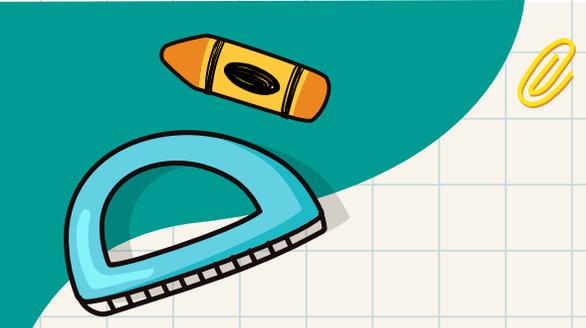




ให้ทำข้อที่ 1







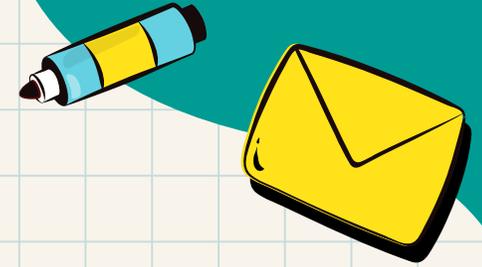
4.1 การเลื่อนขนาน

“ การเลื่อนขนานบนระนาบเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีการเลื่อนจุดทุกจุดไปบนระนาบตามแนวเส้นตรงในทิศทางเดียวกันและเป็นระยะทางเท่ากันตามที่กำหนด ”





สมบัติของการเลื่อนขนาน



01

รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานสามารถทับกันได้สนิทโดยไม่ต้องพลิกรูป หรือกล่าวว่า รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานเท่ากันทุกประการ

02

ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยแต่ละคู่ จะขนานกันและยาวเท่ากันทุกเส้น

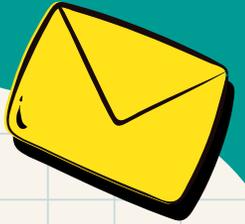
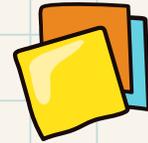
03

ส่วนของเส้นตรงบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน ส่วนของเส้นตรงนั้น จะขนานกันและยาวเท่ากัน



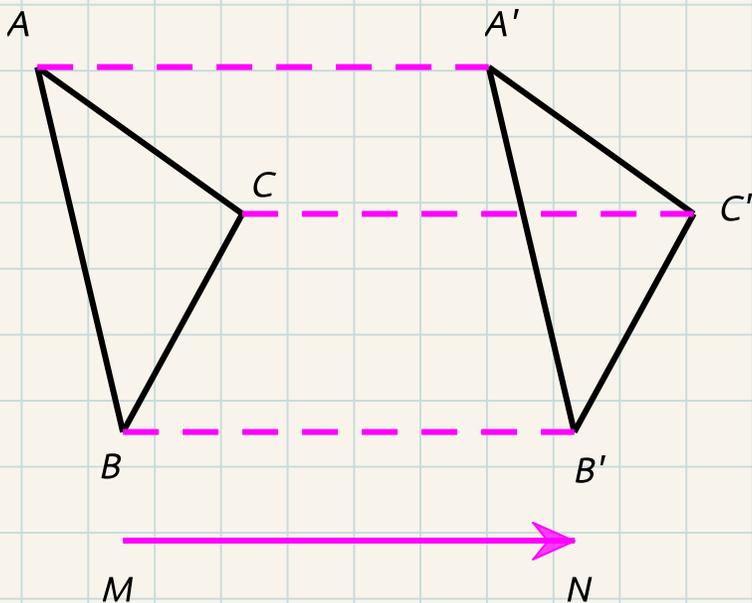


เวกเตอร์ (Vector)



เวกเตอร์ เป็นตัวกำหนดทิศทางและระยะทางของการเลื่อนขนาน

ตัวอย่าง การใช้เวกเตอร์ MN เพื่อบอกทิศทางและระยะทางของการเลื่อนขนาน ดังรูป



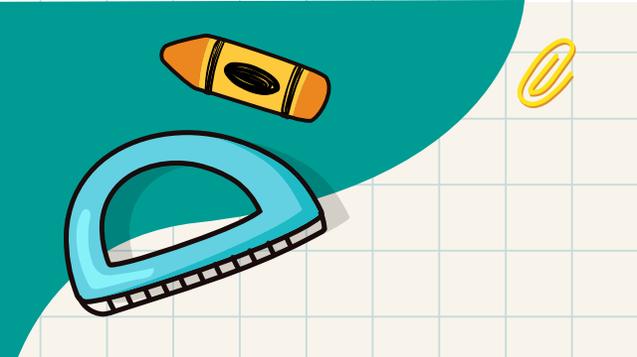
เวกเตอร์ MN เขียนแทนด้วย \overrightarrow{MN}

ซึ่ง \overrightarrow{MN} จะมีทิศทางจากจุดเริ่มต้น M ไปยังจุดสิ้นสุด N และมีขนาดเท่ากับความยาวของ \overline{MN} ซึ่งจะได้ว่า

1. $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ จะขนานกับ \overrightarrow{MN}

2. $AA' = BB' = CC' = MN$



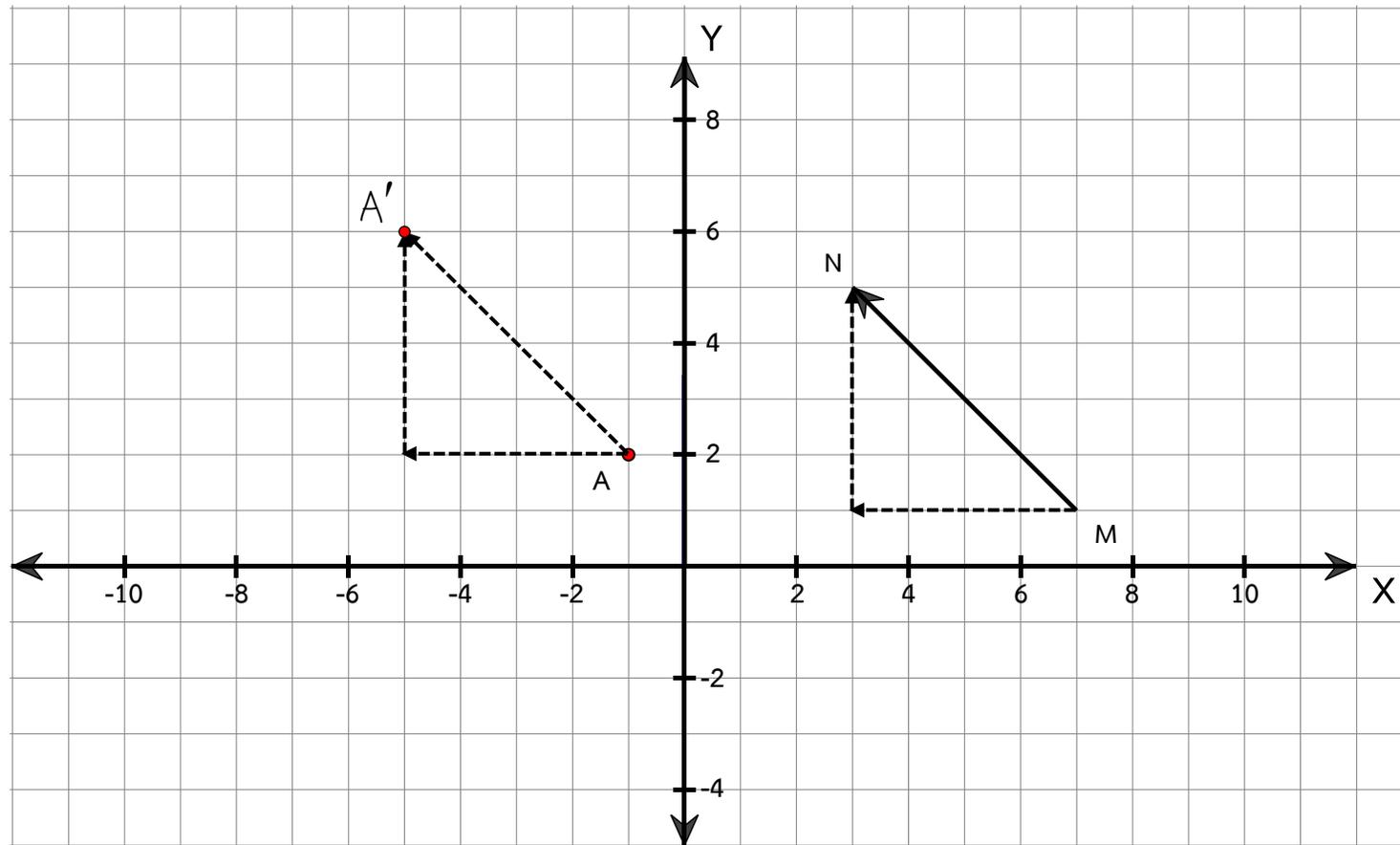


การเลื่อนขนานในระบบพิกัดฉาก

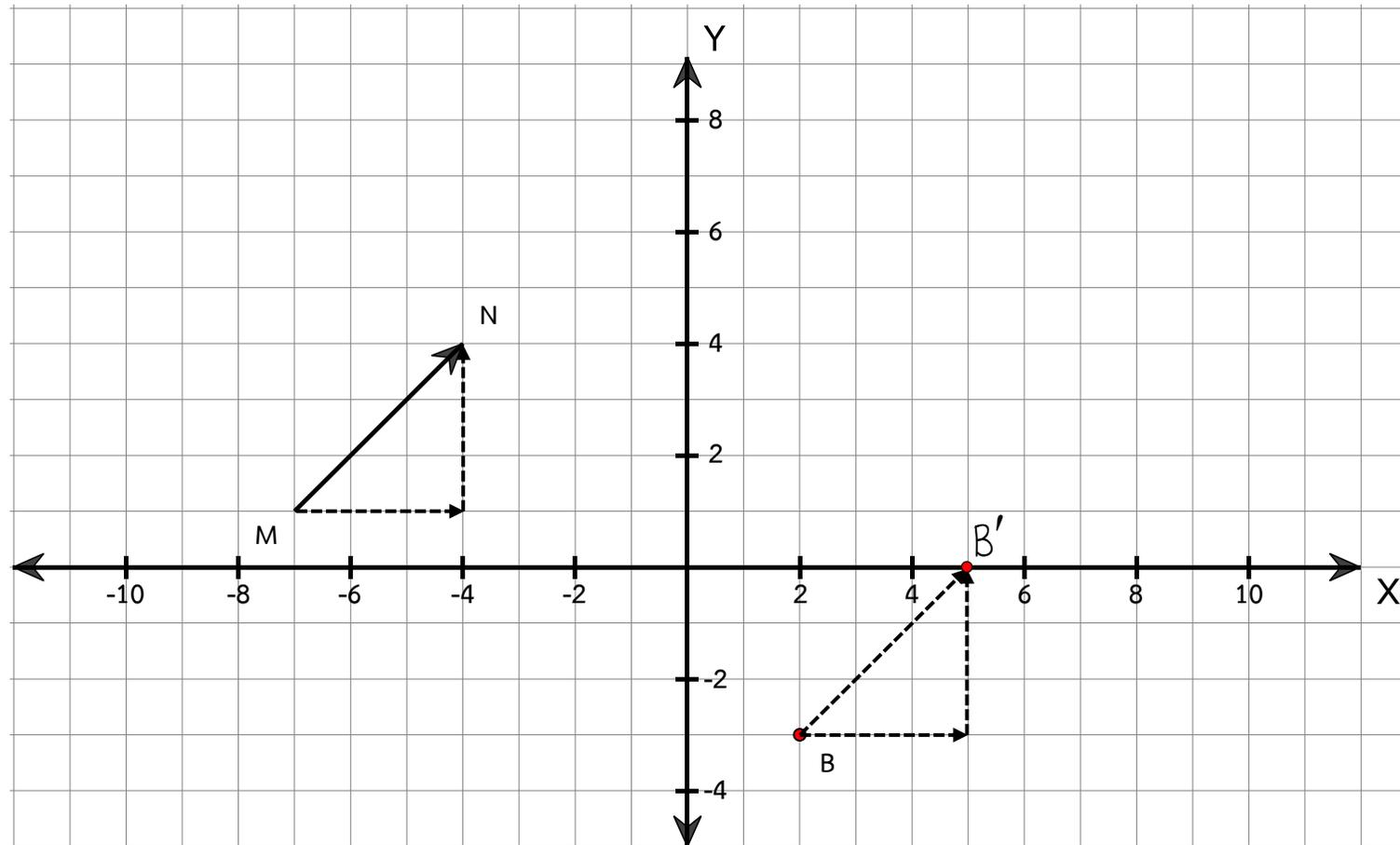
“ การเลื่อนขนานบนระบบพิกัดฉาก จุดต่าง ๆ สามารถแทนได้ด้วย (x, y) โดย x คือ ระยะห่างจากแกน Y และ y คือ ระยะห่างจากแกน X ทำให้การเลื่อนขนานบนระนาบพิกัดฉาก แบ่งออกเป็นการเคลื่อนที่สองส่วน คือ การเคลื่อนที่ในแนวนอน (แกน X) และการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง (แกน Y) ”



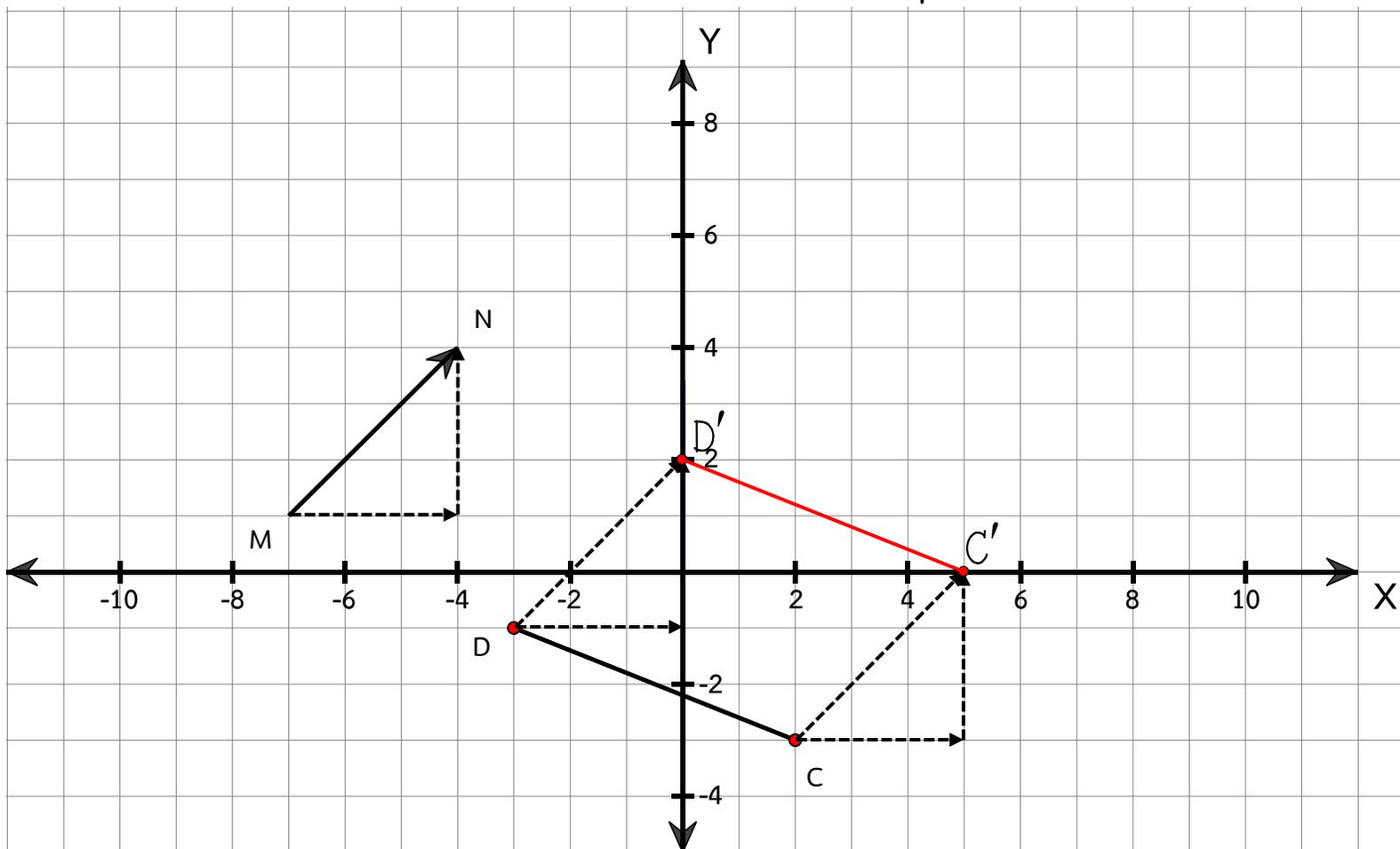
ตัวอย่างที่ 1 กำหนดจุด A และ \overline{MN} จงหาพิกัด A' ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจุด A ด้วย \overline{MN}



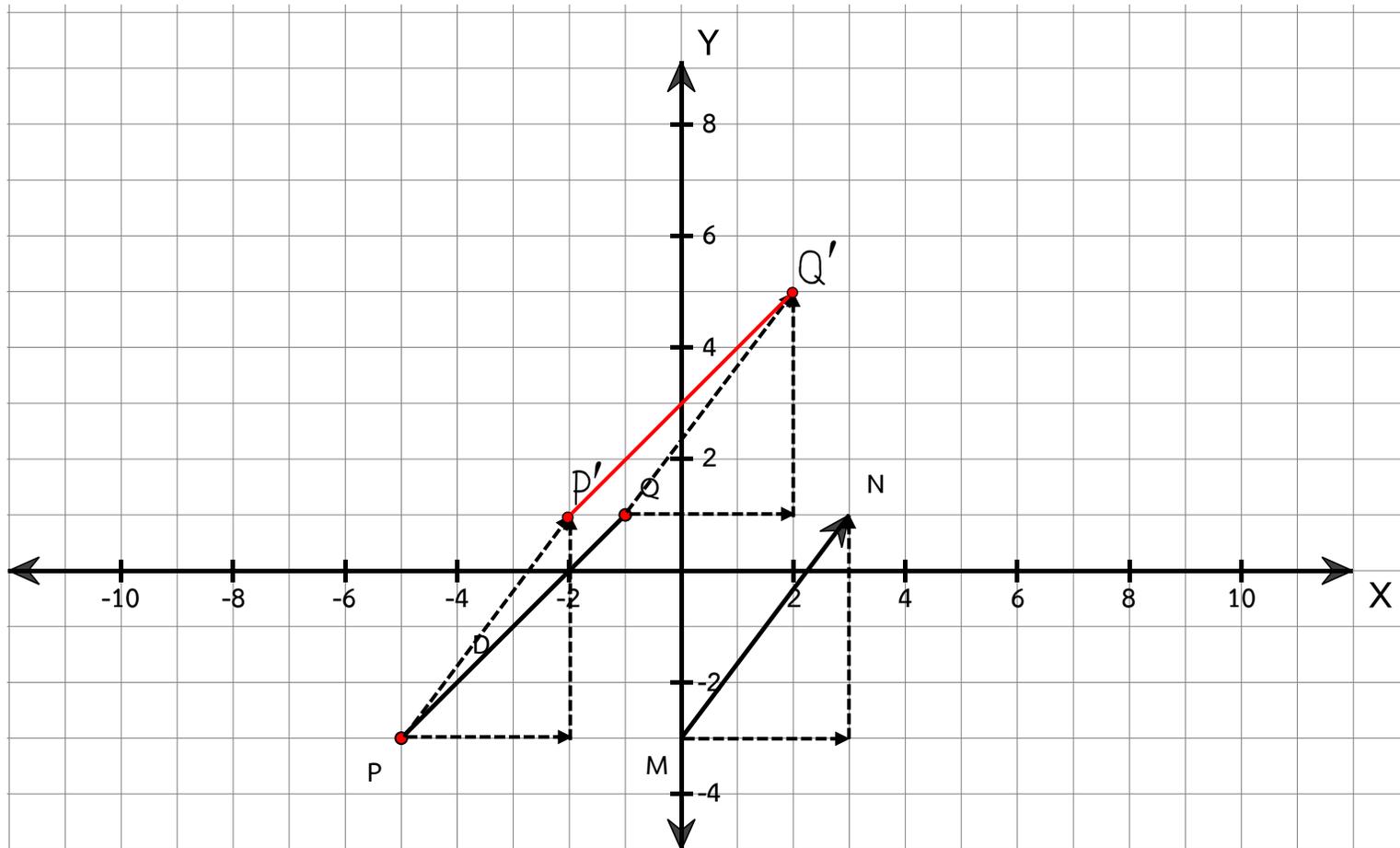
ตัวอย่างที่ 2 กำหนดจุด B และ \overrightarrow{MN} จงหาพิกัด B' ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจุด B ด้วย \overrightarrow{MN}



ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ \overline{CD} และ \overline{MN} จงหา $\overline{C'D'}$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน \overline{CD} ด้วย \overline{MN} พร้อมทั้งบอกพิกัดของจุด C' และ D'



ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ \overline{PQ} และ \overline{MN} จงหา $\overline{P'Q'}$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน \overline{PQ} ด้วย \overline{MN} พร้อมทั้งบอกพิกัดของจุด P' และ Q'

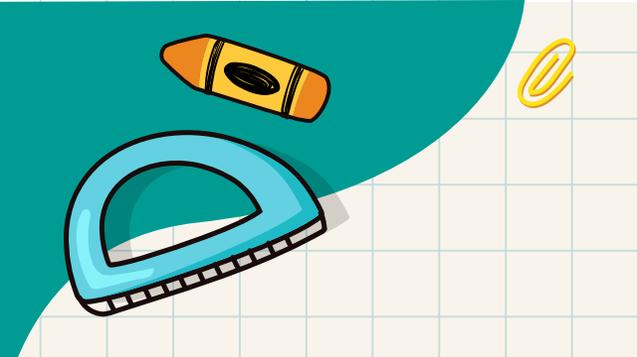




ให้ทำข้อที่ 2 - ข้อที่ 4







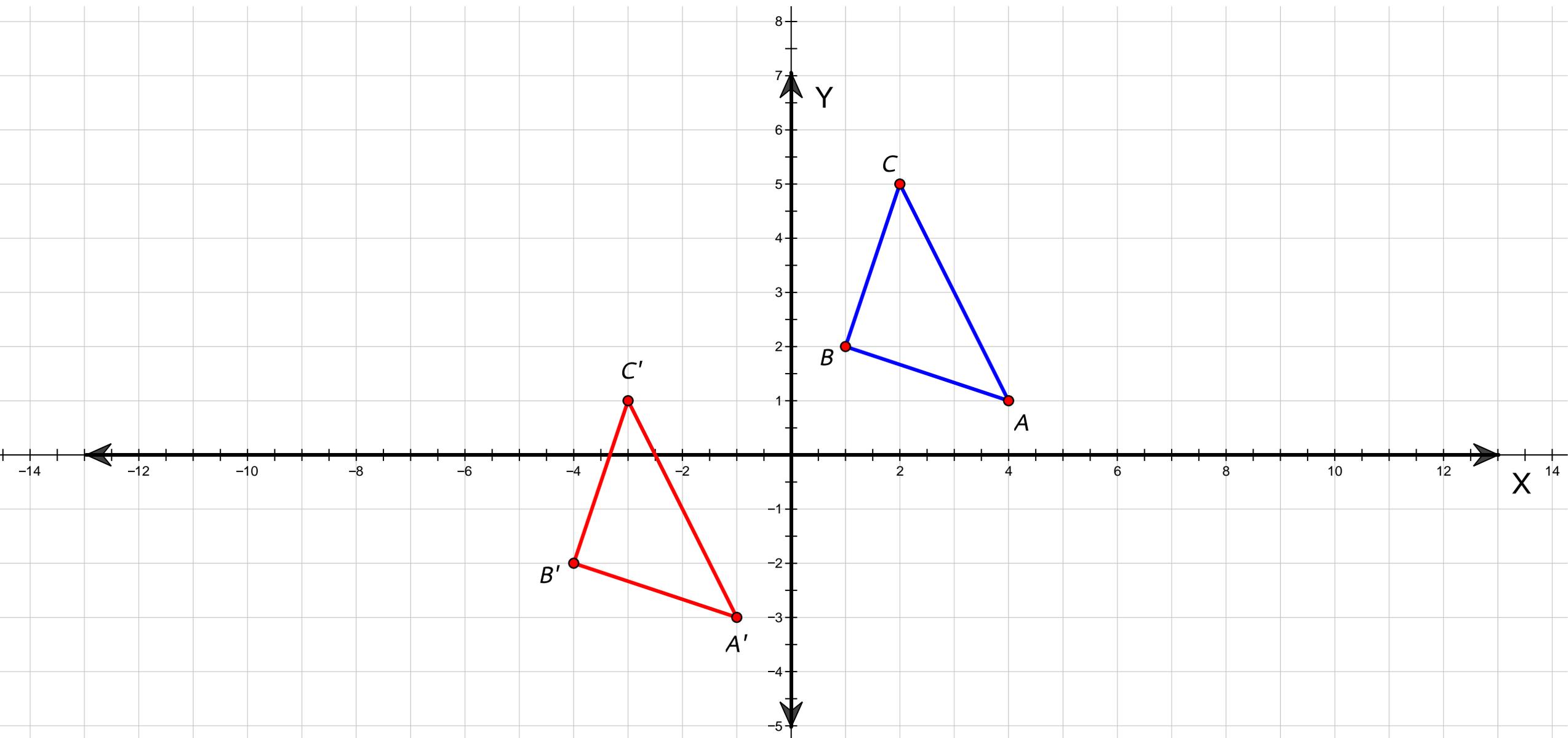
การเลื่อนขนานในระบบพิกัดฉาก

“ การเลื่อนขนานบนระบบพิกัดฉาก จุดต่าง ๆ สามารถแทนได้ด้วย (x, y) โดย x คือ ระยะห่างจากแกน Y และ y คือ ระยะห่างจากแกน X ทำให้การเลื่อนขนานบนระนาบพิกัดฉาก แบ่งออกเป็นการเคลื่อนที่สองส่วน คือ การเคลื่อนที่ในแนวนอน (แกน X) และการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง (แกน Y) ”

เวกเตอร์ เป็นตัวกำหนดทิศทางและระยะทางของการเลื่อนขนาน

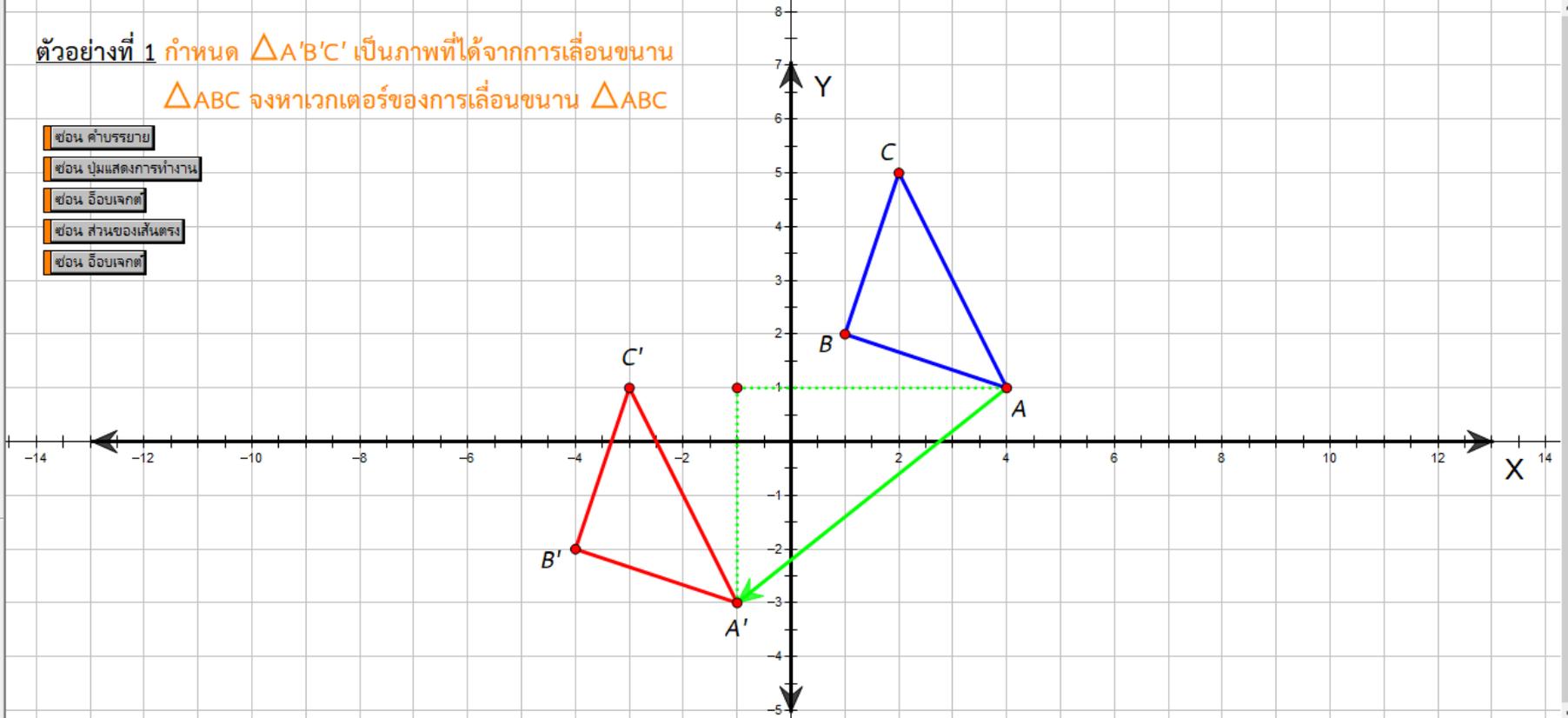


ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $\Delta A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน ΔABC จงหาเวกเตอร์ของการเลื่อนขนาน ΔABC



ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $\triangle A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน
 $\triangle ABC$ จงหาเวกเตอร์ของการเลื่อนขนาน $\triangle ABC$

- ช้อน ค่ายรยาย
- ช้อน ปุ่มแสดงการทำงาน
- ช้อน อีอบเจกต์
- ช้อน ส่วนของเส้นตรง
- ช้อน อีอบเจกต์

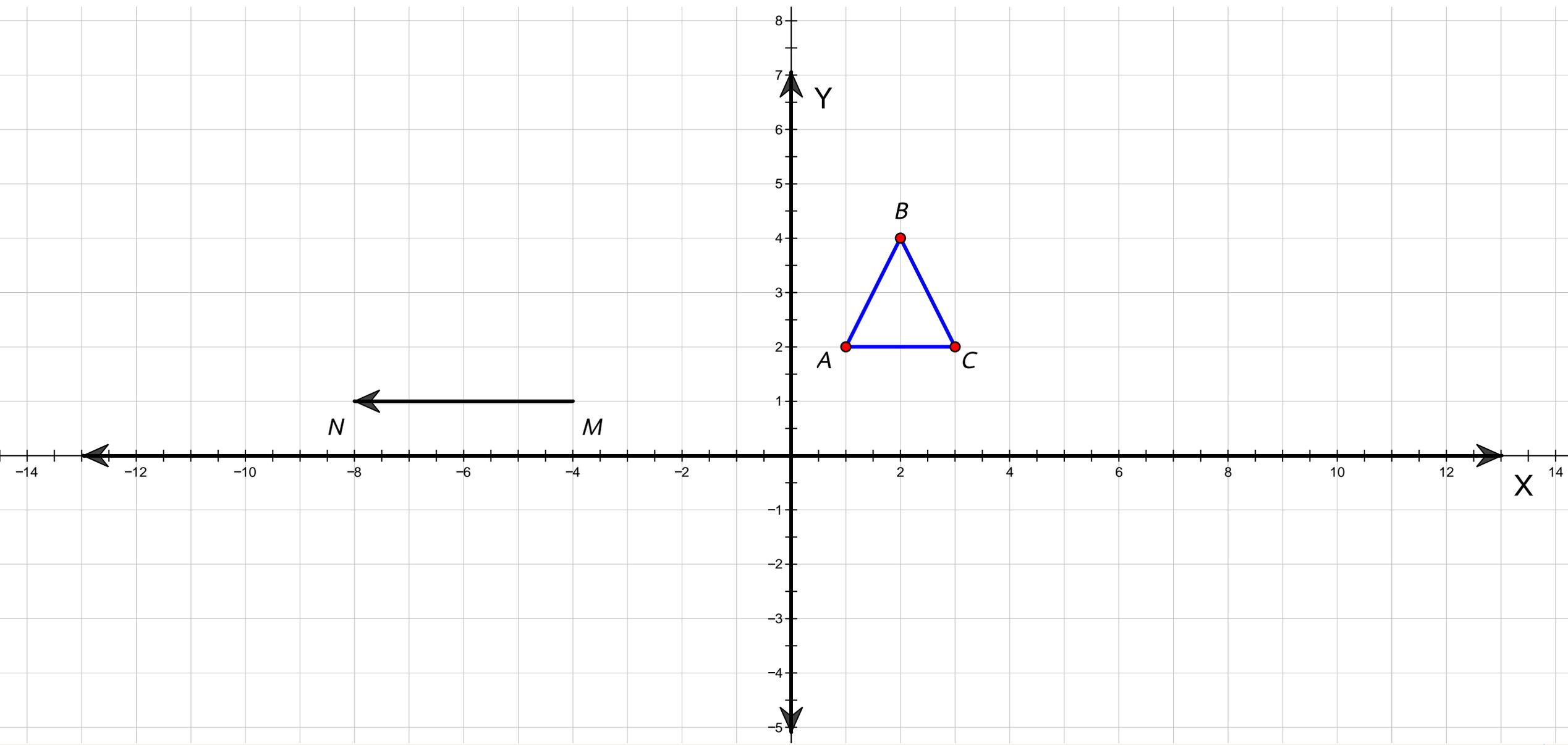


1 2 3 4 5 6 7 8 9 | <

B I U $\frac{16}{3}$



ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\triangle ABC$ และ \overline{MN} จงหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน $\triangle ABC$ ด้วย \overline{MN} พร้อมทั้งบอกพิกัดของจุดยอด



ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\triangle ABC$ และเวกเตอร์ MN จงหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน $\triangle ABC$ ด้วยเวกเตอร์ MN พร้อมทั้งบอกพิกัดของจุดยอด

- ช้อน คำบรรยาย
- ช้อน ปุ่มแสดงการทำงาน
- ช้อน จุด A'
- ช้อน จุด B'
- ช้อน จุด C'
- ช้อน ส่วนของเส้นตรง
- ช้อน พิกัด

A': (-3.00, 2.00)

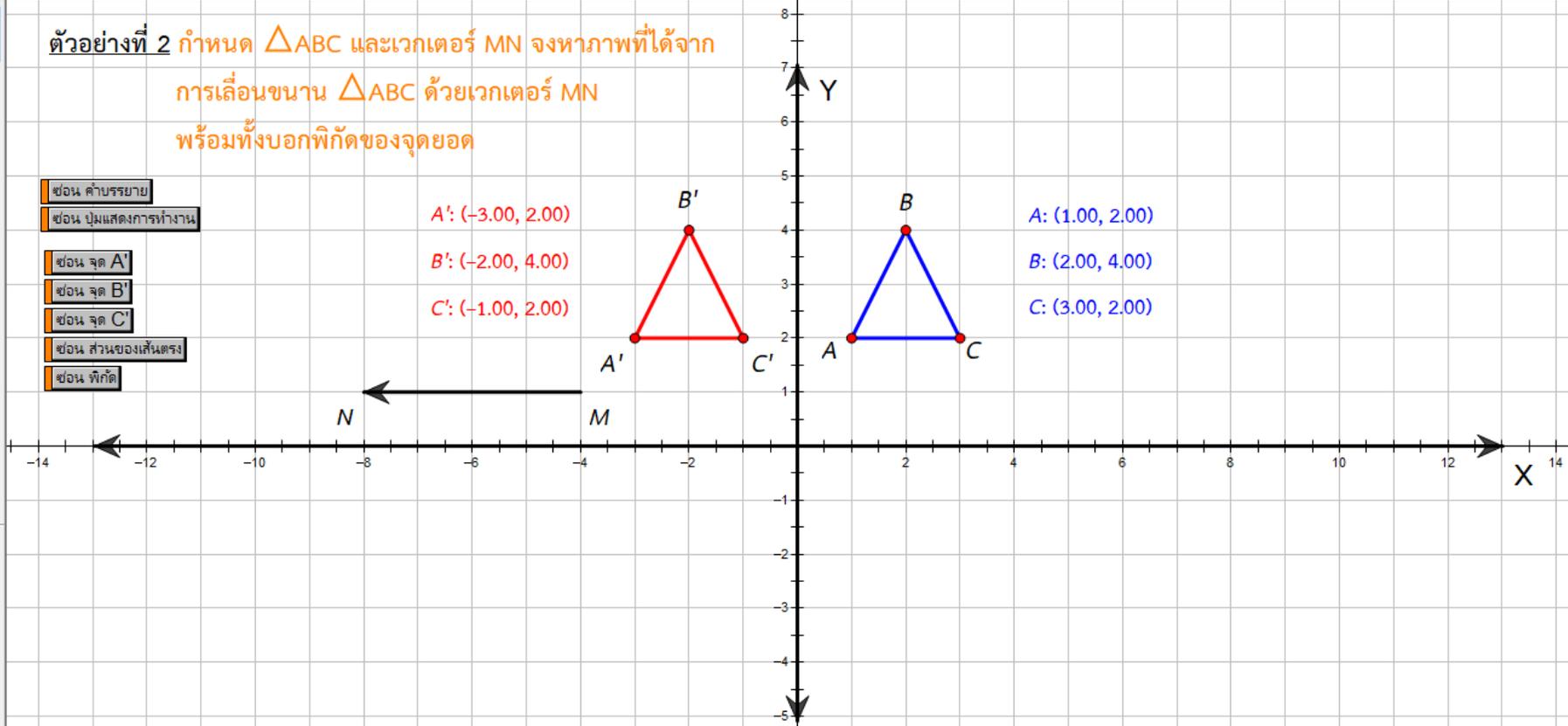
B': (-2.00, 4.00)

C': (-1.00, 2.00)

A: (1.00, 2.00)

B: (2.00, 4.00)

C: (3.00, 2.00)

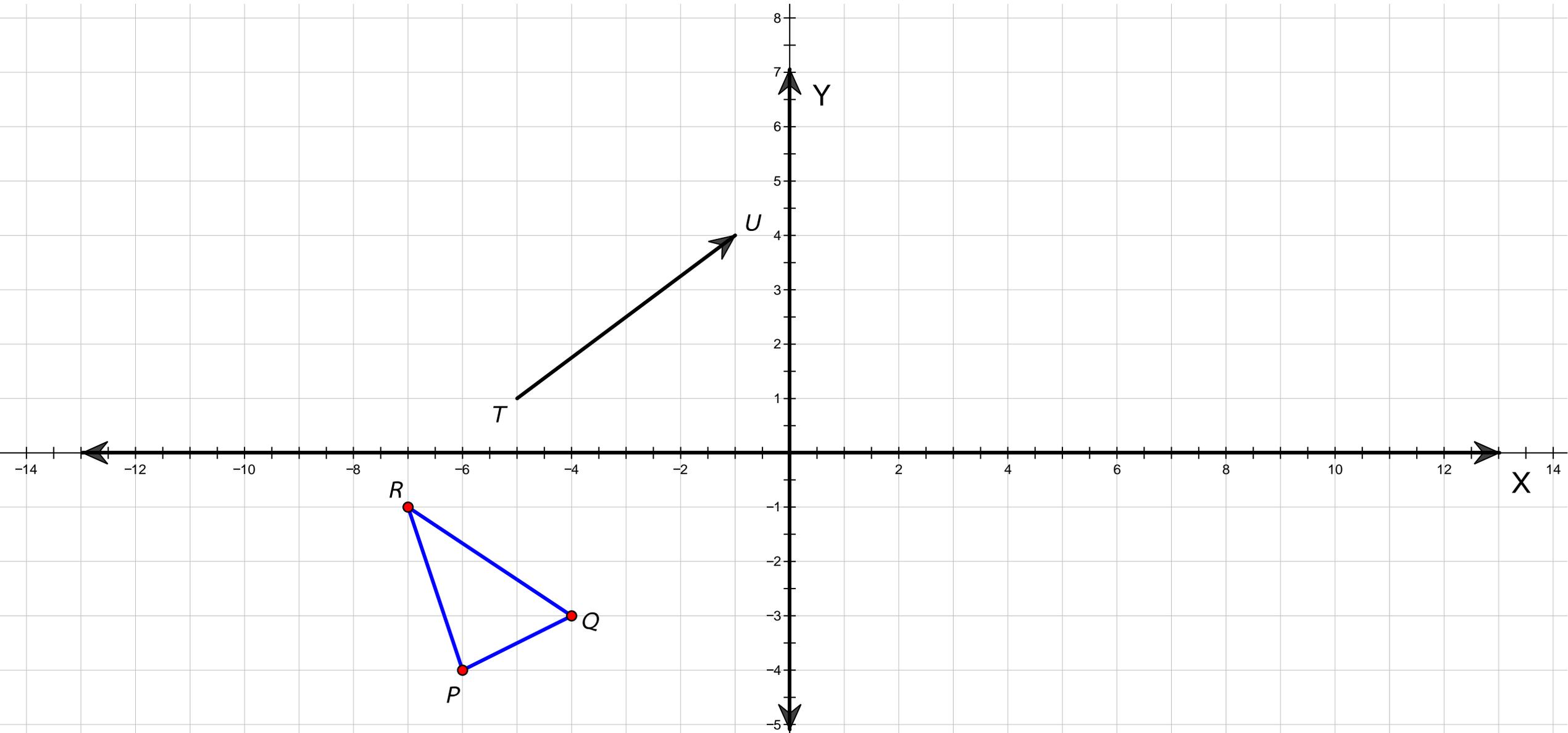


1 2 3 4 5 6 7 8 9 <

B I U $\frac{1}{3}$

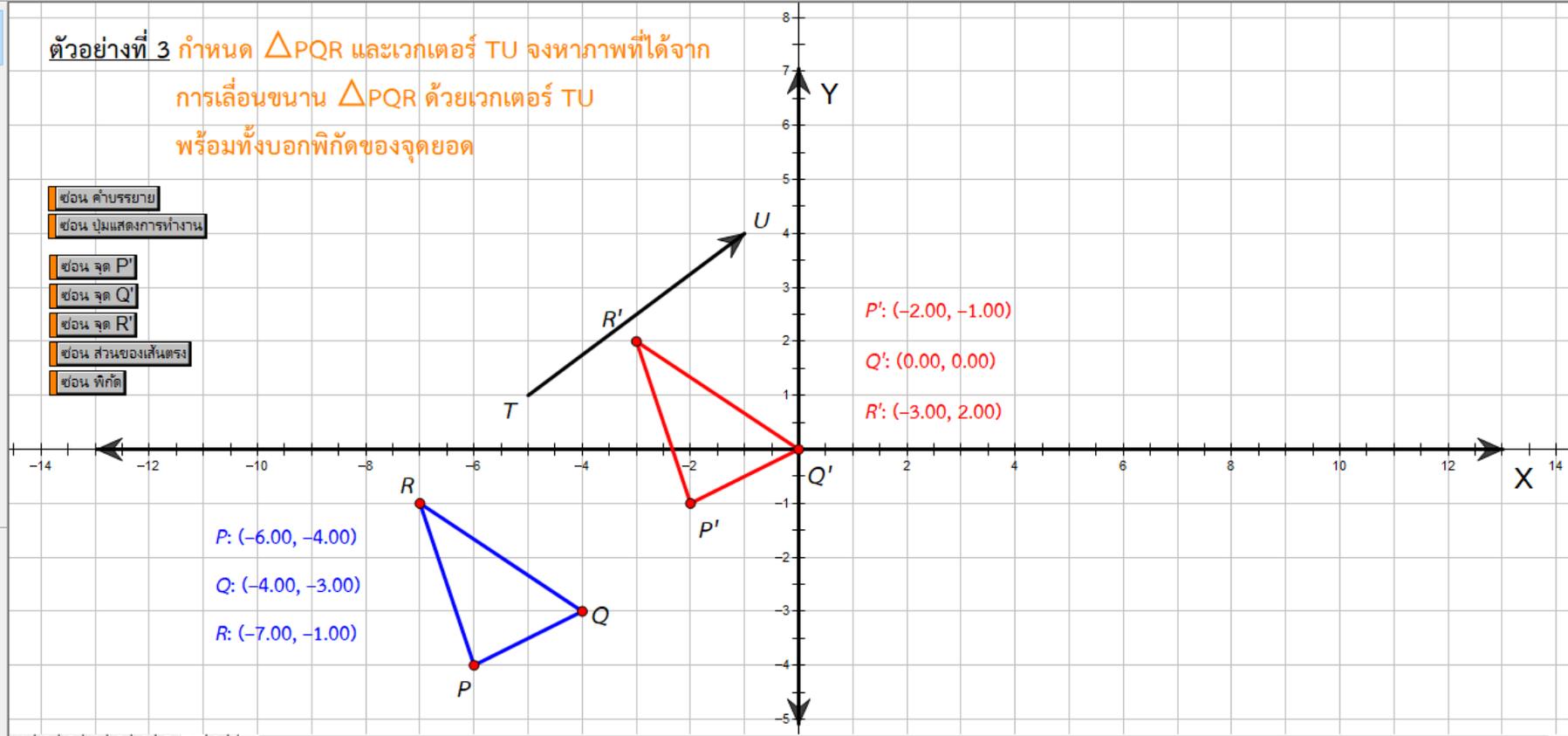


ตัวอย่างที่ 3 กำหนด ΔPQR และ \vec{TU} จงหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน ΔPQR ด้วย \vec{TU} พร้อมทั้งบอกพิกัดของจุดยอด

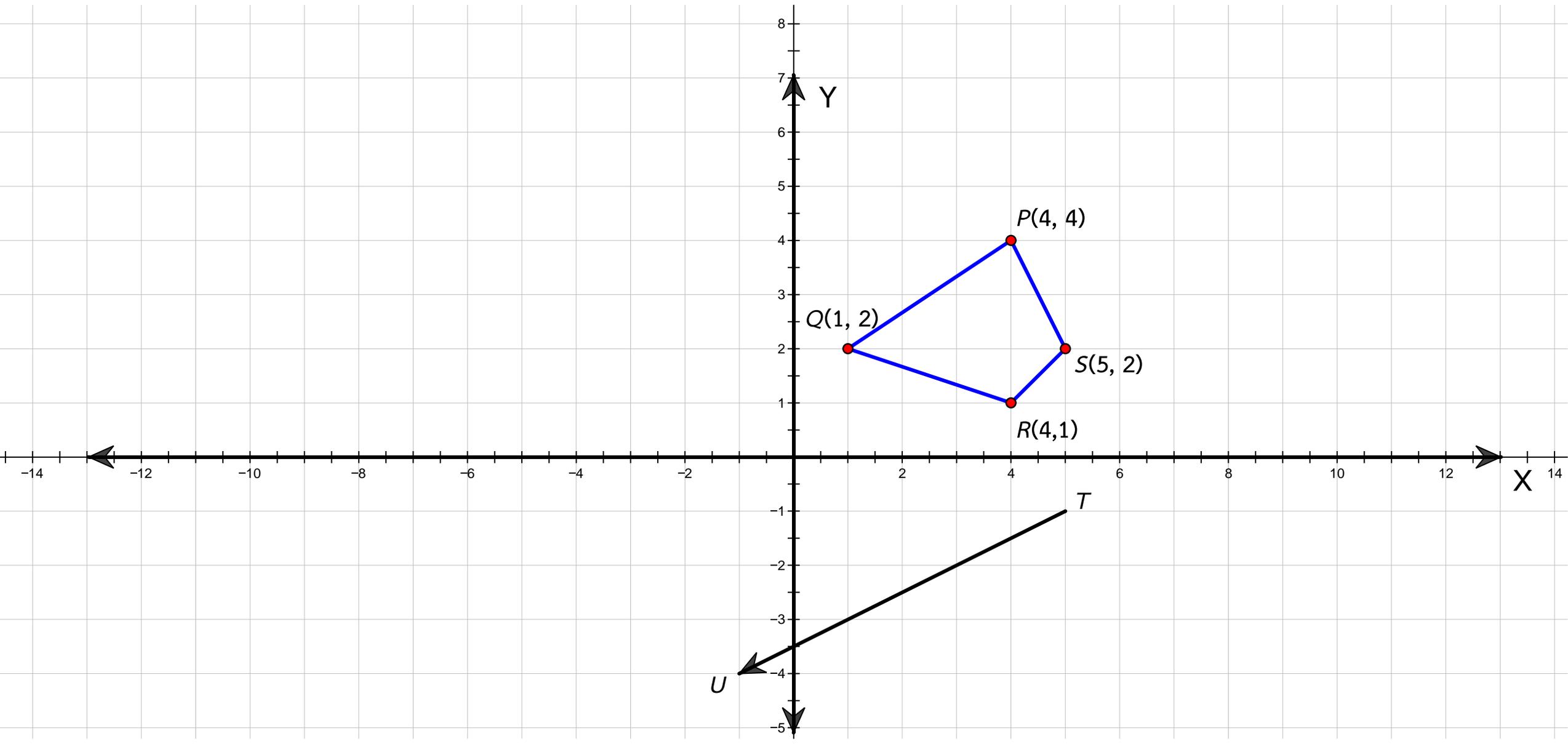


ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\triangle PQR$ และเวกเตอร์ TU จงหาภาพที่ได้จาก
การเลื่อนขนาน $\triangle PQR$ ด้วยเวกเตอร์ TU
พร้อมทั้งบอกพิกัดของจุดยอด

- ชื่อน คำบรรยาย
- ชื่อน ปุ่มแสดงการทำงาน
- ชื่อน จุด P'
- ชื่อน จุด Q'
- ชื่อน จุด R'
- ชื่อน ส่วนของเส้นตรง
- ชื่อน พิกัด

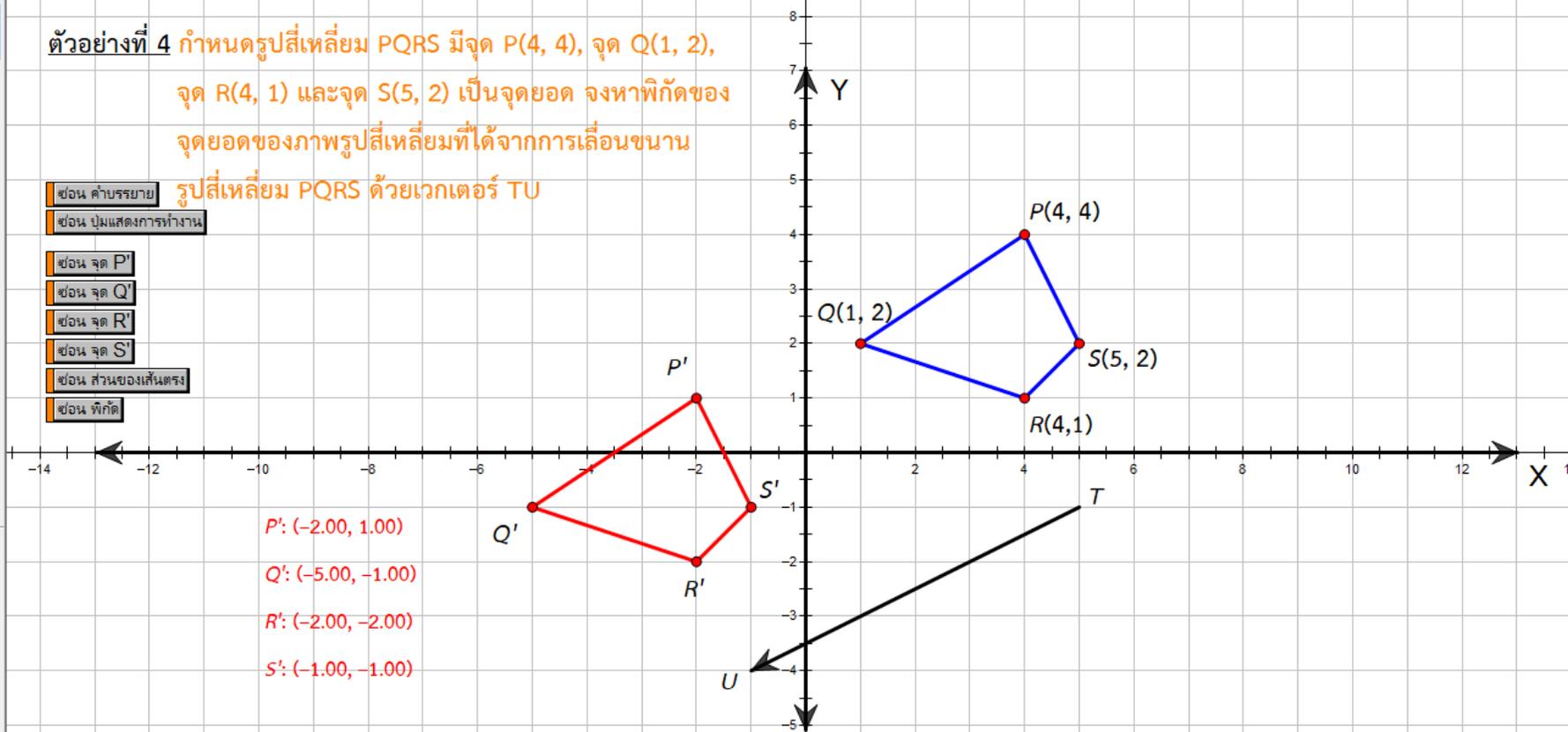


ตัวอย่างที่ 4 กำหนดรูปสี่เหลี่ยม PQRS มีจุด $P(4, 4)$, จุด $Q(1, 2)$, จุด $R(4, 1)$ และจุด $S(5, 2)$ เป็นจุดยอด จงหาพิกัดของจุดยอดของภาพรูปสี่เหลี่ยมที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปสี่เหลี่ยม PQRS ด้วย \overline{TU}



ตัวอย่างที่ 4 กำหนดรูปสี่เหลี่ยม PQRS มีจุด P(4, 4), จุด Q(1, 2), จุด R(4, 1) และจุด S(5, 2) เป็นจุดยอด จงหาพิกัดของจุดยอดของภาพรูปสี่เหลี่ยมที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปสี่เหลี่ยม PQRS ด้วยเวกเตอร์ TU

- ซ่อน คำบรรยาย
- ซ่อน ปุ่มแสดงการทำงาน
- ซ่อน จุด P'
- ซ่อน จุด Q'
- ซ่อน จุด R'
- ซ่อน จุด S'
- ซ่อน ส่วนของเส้นตรง
- ซ่อน พิกัด



P': (-2.00, 1.00)

Q': (-5.00, -1.00)

R': (-2.00, -2.00)

S': (-1.00, -1.00)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 <

B I U $\frac{1}{3}$

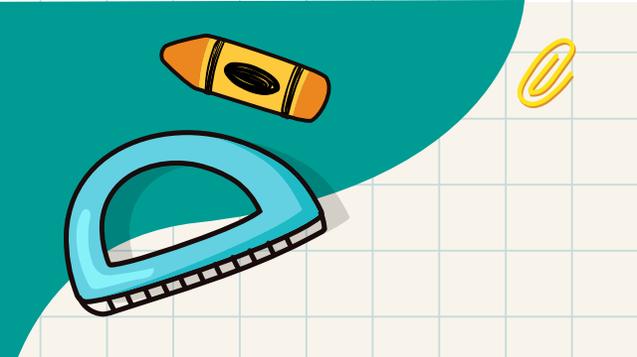




ให้ทำข้อที่ 5 และข้อที่ 6







การเลื่อนขนานในระบบพิกัดฉาก

“ การเลื่อนขนานบนระบบพิกัดฉาก จุดต่าง ๆ สามารถแทนได้ด้วย (x, y) โดย x คือ ระยะห่างจากแกน Y และ y คือ ระยะห่างจากแกน X ทำให้การเลื่อนขนานบนระนาบพิกัดฉาก แบ่งออกเป็นการเคลื่อนที่สองส่วน คือ การเคลื่อนที่ในแนวนอน (แกน X) และการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง (แกน Y) ”

เวกเตอร์ เป็นตัวกำหนดทิศทางและระยะทางของการเลื่อนขนาน



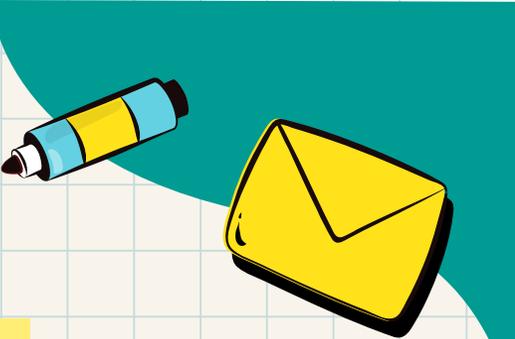
ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของจุดบนรูปต้นแบบ (จุด A) พิกัดของจุดบนภาพ
ที่ได้จากการเลื่อนขนานจุดนั้น (จุด A') และเวกเตอร์ของการเลื่อนขนานเป็นดังนี้



พิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด A' = พิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด A + ระยะที่เลื่อนจุด A ไปตามแนวแกน X
(โดยคิดทิศทาง)

พิกัดที่สอง (y) ของจุด A' = พิกัดที่สอง (y) ของจุด A + ระยะที่เลื่อนจุด A ไปตามแนวแกน Y
(โดยคิดทิศทาง)




$$\text{เวกเตอร์ } \overline{MN} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}; \text{ พิกัดจุด } M(x_1, y_1) \text{ และ } N(x_2, y_2)$$

โดยที่ $x_2 - x_1$ แทน ระยะที่เลื่อนจุด ไปทางซ้ายหรือขวา ตามแนวแกน X
 $y_2 - y_1$ แทน ระยะที่เลื่อนจุด ขึ้นบนหรือลงล่าง ตามแนวแกน Y



ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม ABCD มีจุด $A(-6, 1)$, $B(-2, 1)$, $C(-1, 3)$ และ $D(-5, 3)$ เป็นจุดยอด จงสร้างรูปที่เกิดจากการเลื่อนขนานรูปสี่เหลี่ยม ABCD ขนานกับแกน X ไปทางขวา 7 หน่วย

วิธีทำ ต้องสร้างจุด A' , B' , C' , D' ที่เกิดจากการเลื่อนขนานจุด A , B , C และ D ขนานกับแกน X ไปทางขวา 7 หน่วย

ดังนั้น หาพิกัดของจุดที่ได้จากการเลื่อนขนานได้ดังนี้

พิกัดของจุด A' คือ

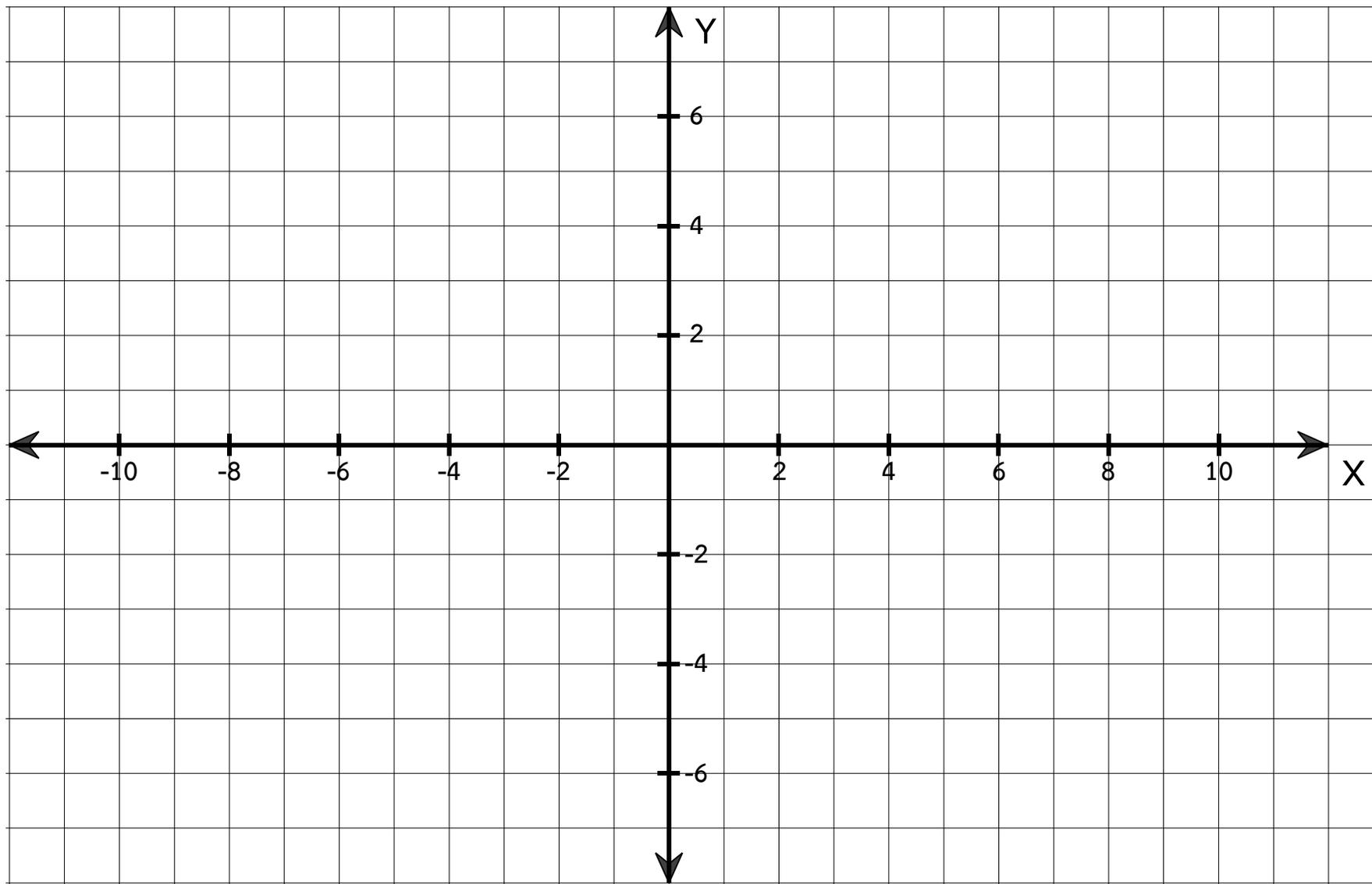
พิกัดของจุด B' คือ

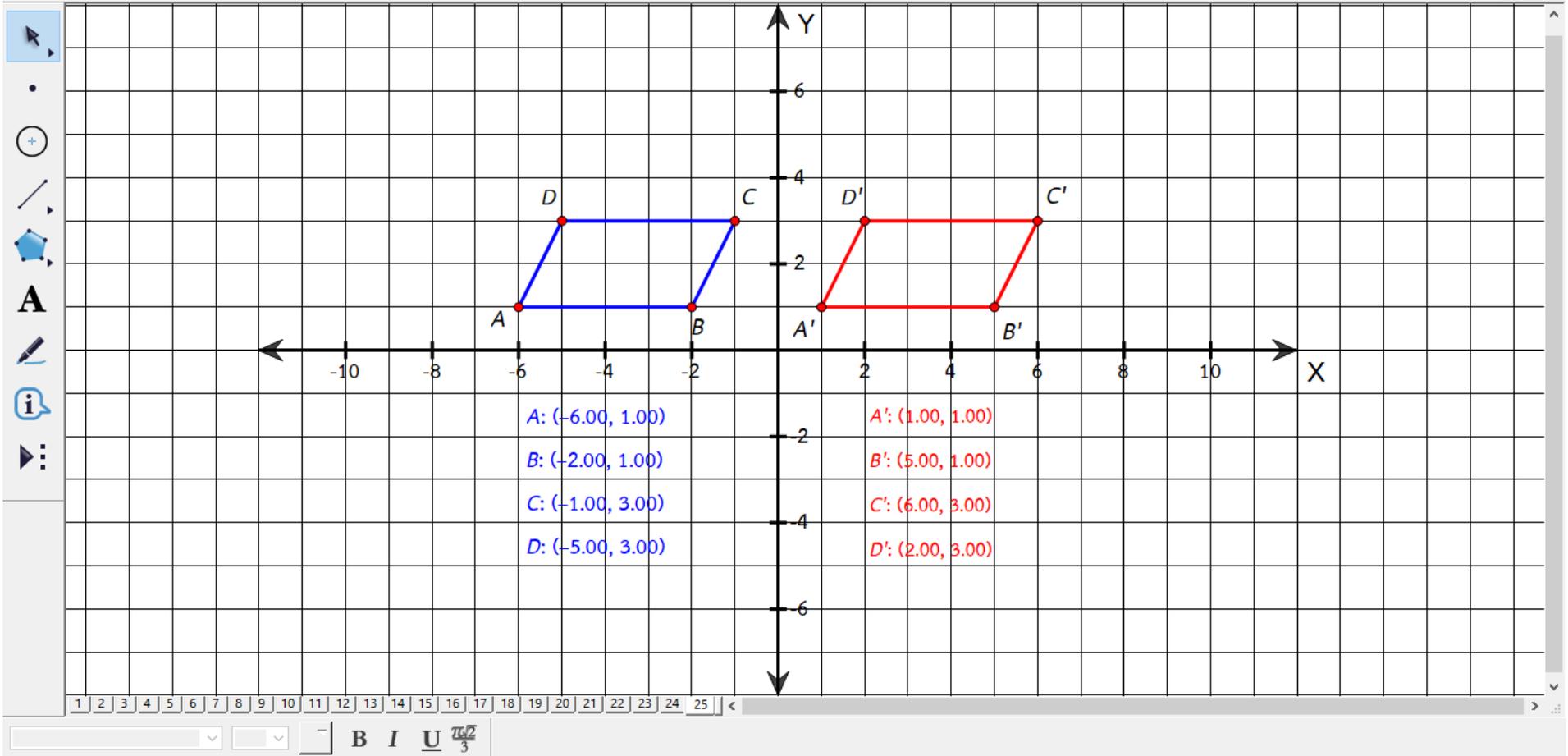
พิกัดของจุด C' คือ

พิกัดของจุด D' คือ



วิธีทำ (ต่อ) นำพิกัดจุดที่ได้ไปลงในกราฟ และลากเส้นต่อจุด จะได้รูปสี่เหลี่ยม $A'B'C'D'$





ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\triangle ABC$ มีจุด $A(2, 1)$, $B(-2, 3)$ และ $C(1, -2)$ ซึ่งเลื่อนขนานด้วย \overline{MN} เมื่อ $M(9, -2)$ และ $N(4, -6)$ จงหาพิกัดของจุดยอดของ $\triangle A'B'C'$ พร้อมลงจุดและลากเส้นต่อจุดลงในกราฟ

วิธีทำ เนื่องจาก เวกเตอร์ $\overline{MN} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$; พิกัดจุด $M(x_1, y_1)$ และ $N(x_2, y_2)$

$$\text{จะได้ว่า } \overline{MN} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

ดังนั้น พิกัดของจุดที่ได้จากการเลื่อนขนานเป็นดังนี้

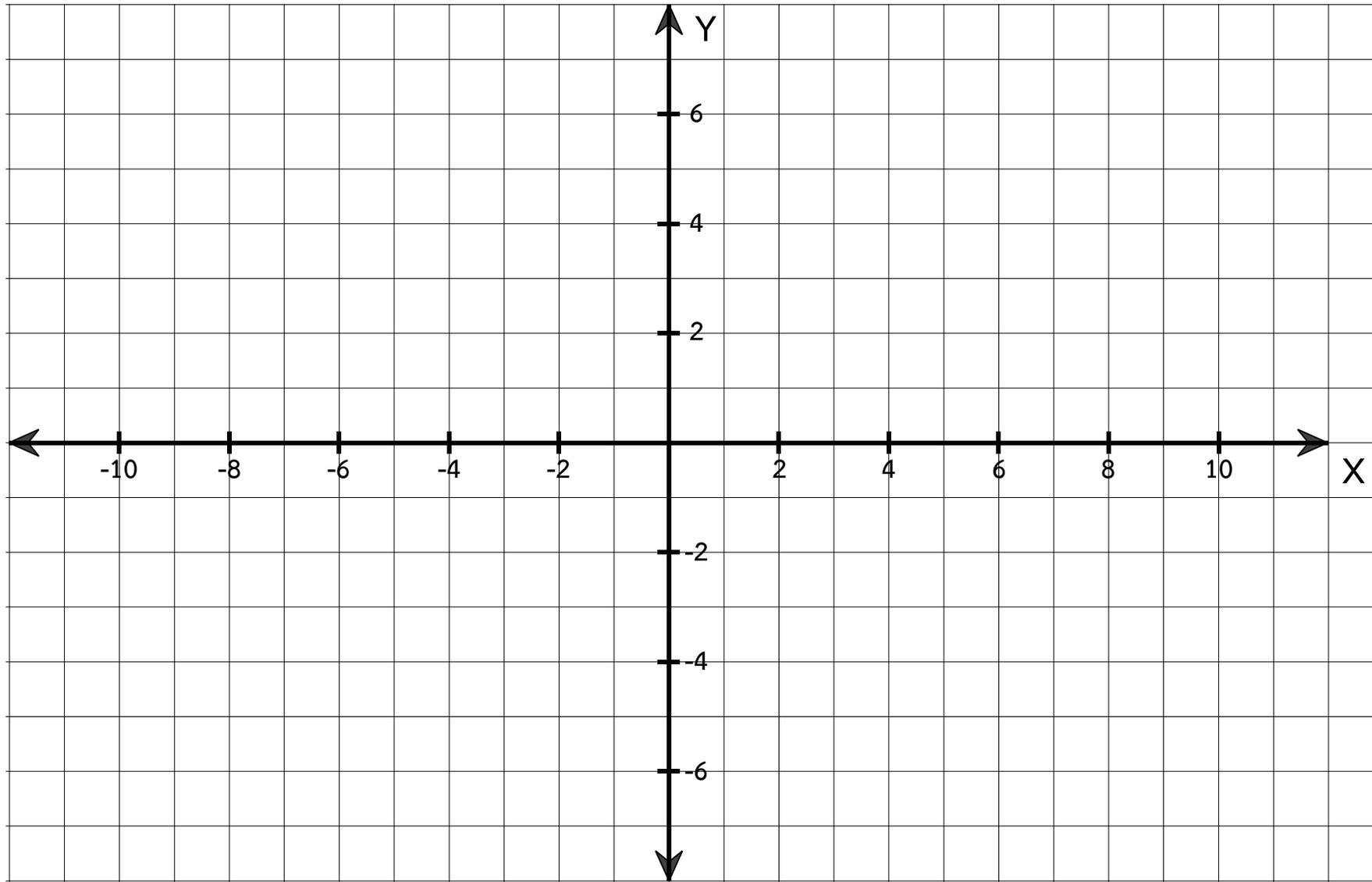
$$A' =$$

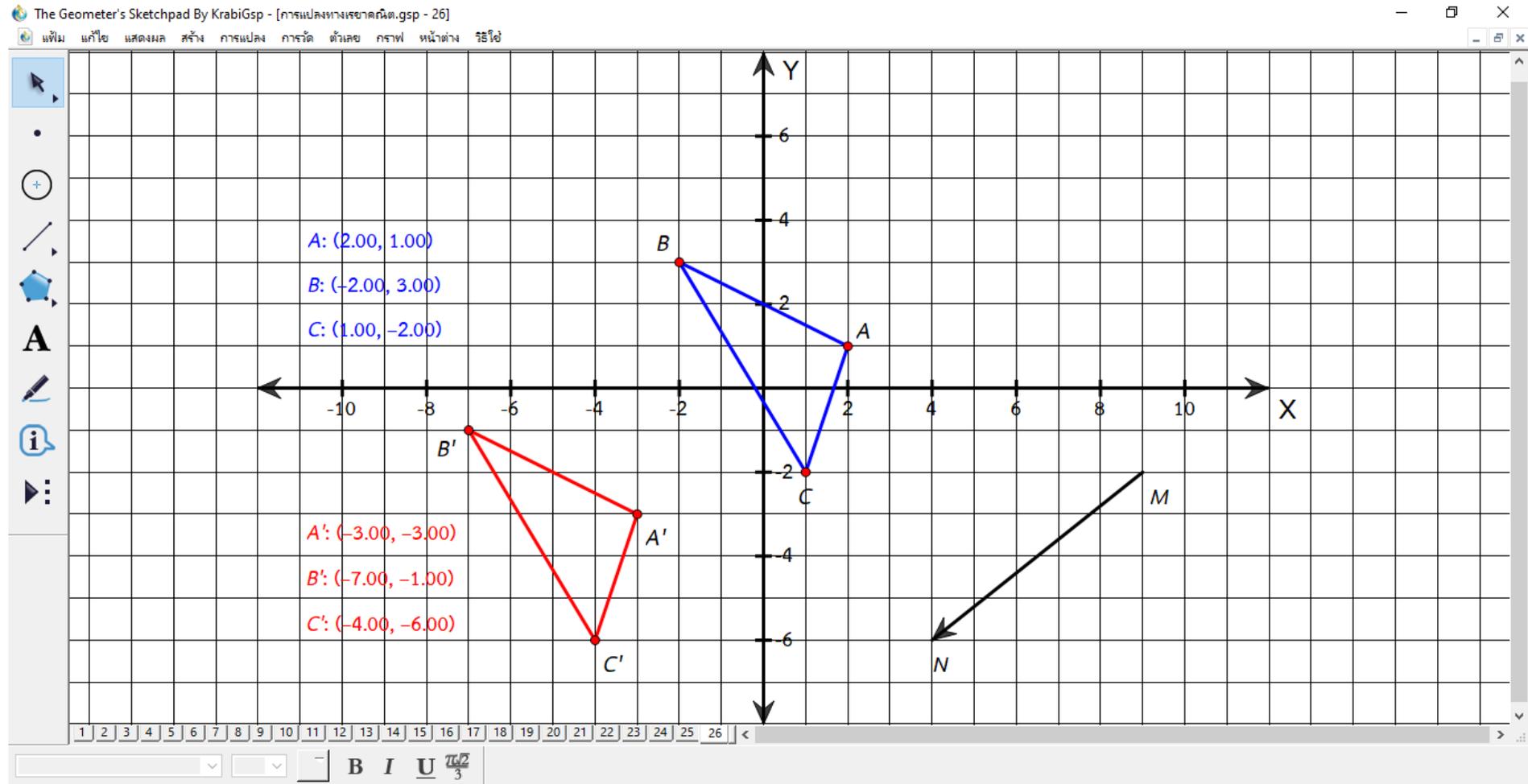
$$B' =$$

$$C' =$$



วิธีทำ (ต่อ) นำพิกัดจุดที่ได้ไปลงในกราฟ และลากเส้นต่อจุด จะได้ $\Delta A'B'C'$





ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\triangle ABC$ มีจุด $A(4, -2)$, $B(3, 3)$ และ $C(6, 2)$ ซึ่งเลื่อนขนานด้วย \overline{MN} เมื่อ $M(-2, 2)$ และ $N(-6, 4)$ จงหาพิกัดของจุดยอดของ $\triangle A'B'C'$ พร้อมลงจุดและลากเส้นต่อจุดลงในกราฟ

วิธีทำ เนื่องจาก เวกเตอร์ $\overline{MN} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$; พิกัดจุด $M(x_1, y_1)$ และ $N(x_2, y_2)$

$$\text{จะได้ว่า } \overline{MN} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

ดังนั้น พิกัดของจุดที่ได้จากการเลื่อนขนานเป็นดังนี้

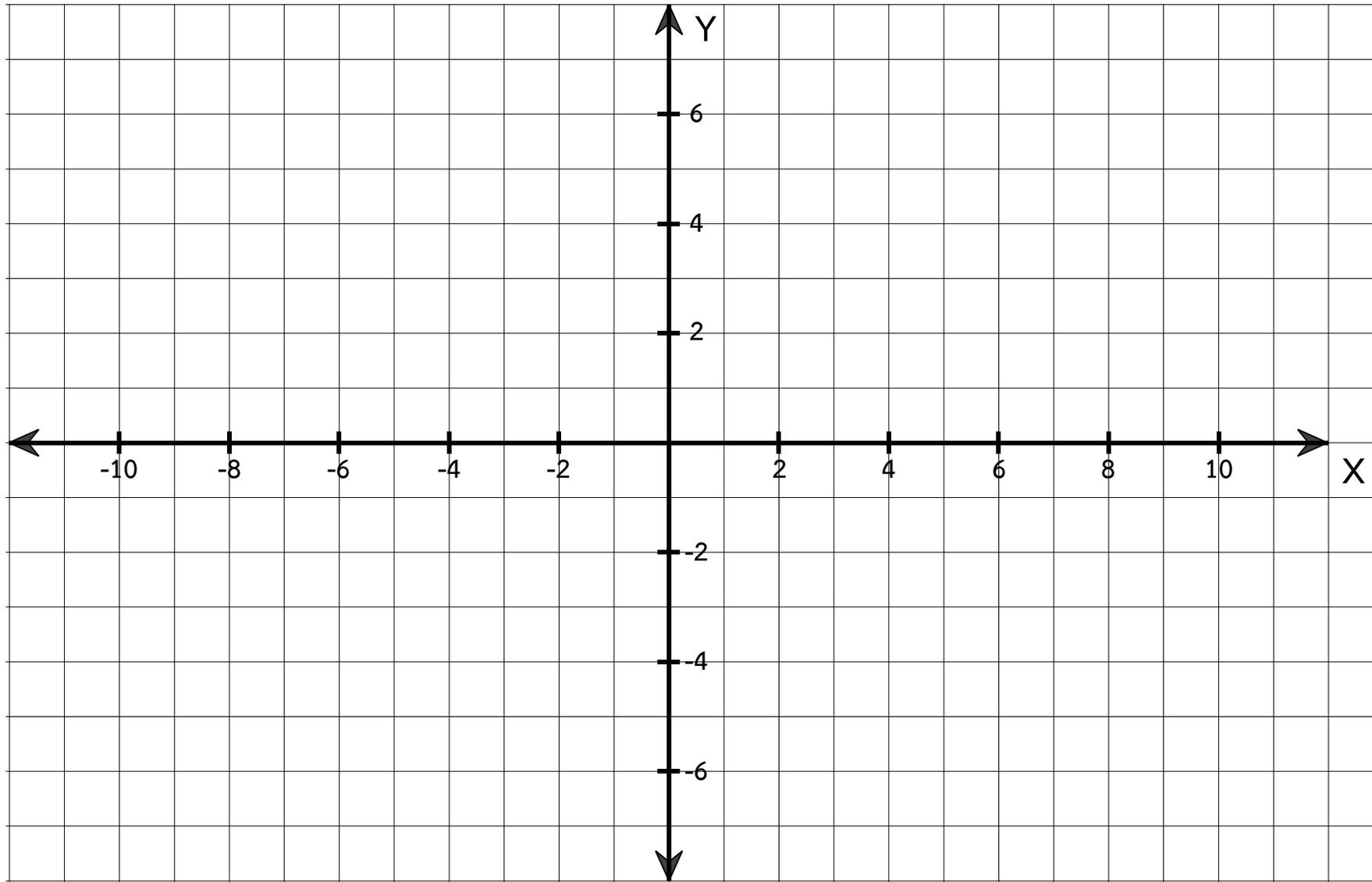
$$A' =$$

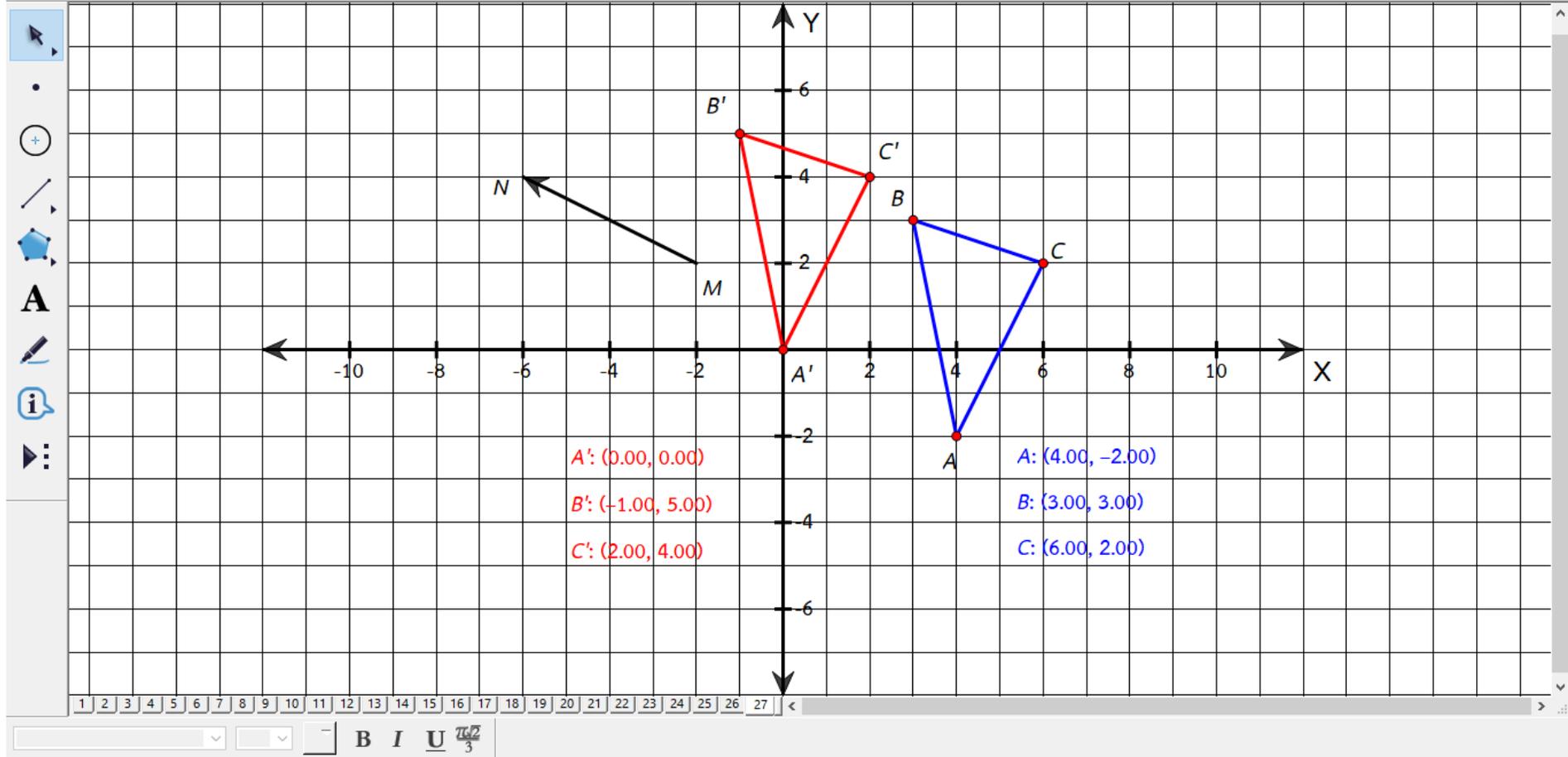
$$B' =$$

$$C' =$$



วิธีทำ (ต่อ) นำพิกัดจุดที่ได้ไปลงในกราฟ และลากเส้นต่อจุด จะได้ $\Delta A'B'C'$



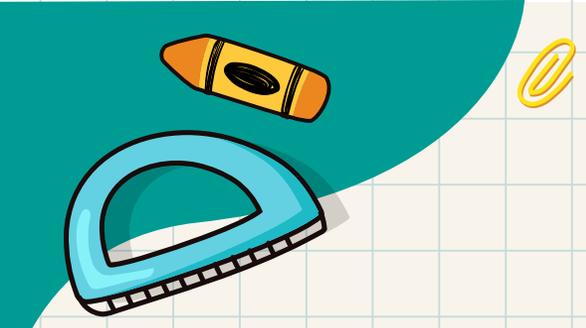




ให้ทำข้อที่ 7 – ข้อที่ 10







การประยุกต์ของการเลื่อนขนาน

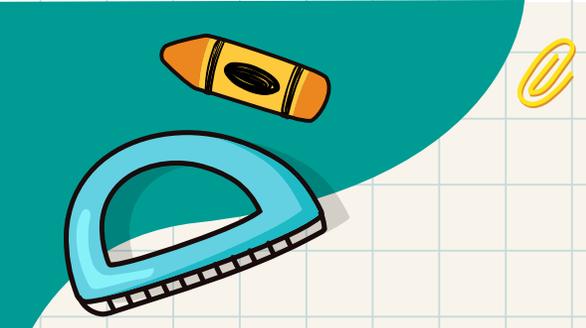
01

เตียงปรับระดับเป็นอุปกรณ์ทางการแพทย์ที่ใช้สำหรับยกระดับคนไข้ให้สูงขึ้นหรือต่ำลง เพื่อความสะดวกในการทำงานของแพทย์ หรือเพื่อเคลื่อนย้ายคนไข้ ขณะที่ปรับระดับ ความสูงของเตียง ส่วนของเตียงที่รองรับตัวคนไข้จะขนานกับฐานของเตียงตลอดเวลา

02

โต๊ะรูดผ้า จะเห็นว่าการปรับให้โต๊ะรูดผ้าอยู่ในตำแหน่งต่าง ๆ นั้น





การประยุกต์ของการเลื่อนขนาน

@

03

แม่แรงยกรถเป็นเครื่องมืออีกอย่างหนึ่งที่ใช้การเลื่อนขนานกับส่วนที่ดันให้สูงขึ้น

04

การเปิด - ปิด ประตูเหล็กที่เราเห็นติดตั้งตามตึกแถว

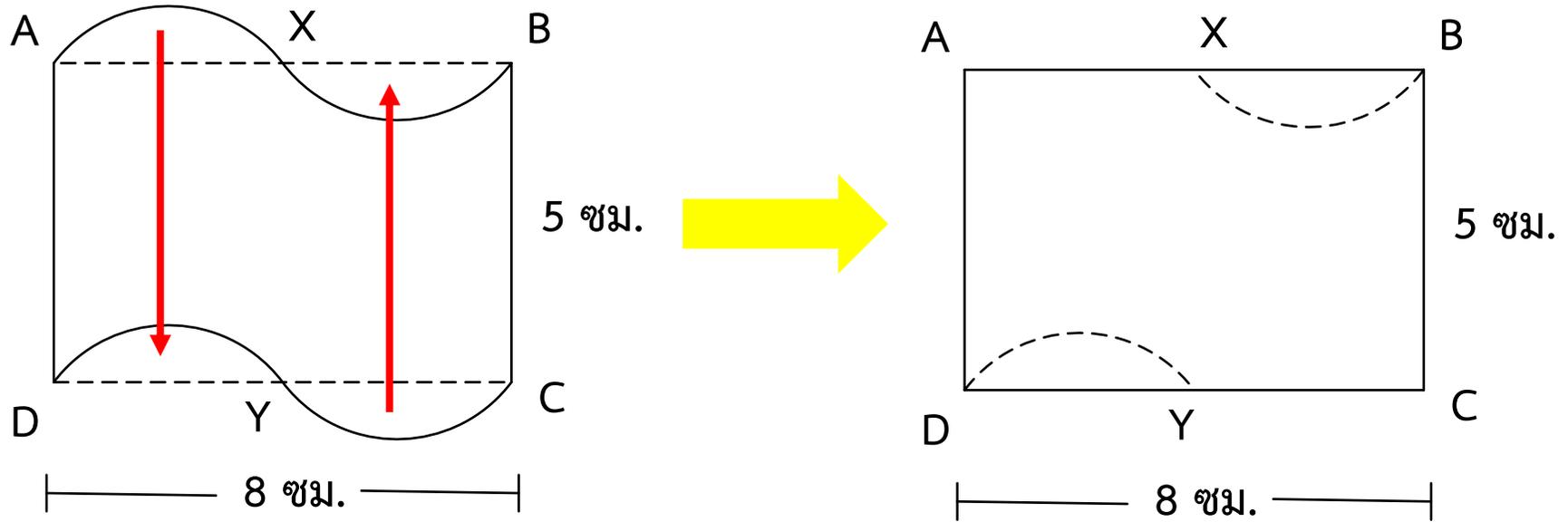
05

เครื่องทำลูกกุกุญแจสำรองมีตัวนำหรือไกด์เลื่อนไปตามโครงร่างของลูกกุกุญแจ
ต้นแบบที่ต้องการทำสำเนา



ตัวอย่างที่ 2 จงใช้การเลื่อนขนานหาพื้นที่โดยประมาณของรูปที่กำหนดให้

วิธีทำ



นั่นคือ รูปที่กำหนดให้มีพื้นที่ประมาณ ตารางเซนติเมตร

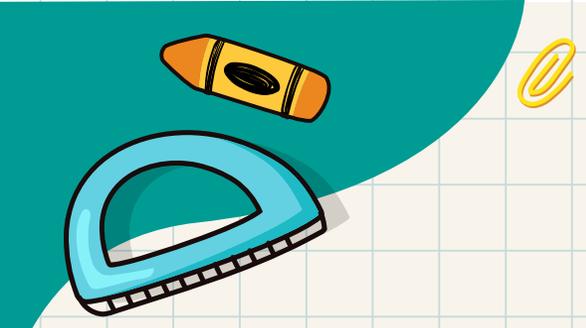




ให้ทำข้อที่ 11







4.2 การสะท้อน

“ เป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีการพลิกรูป โดยมีเส้นในแนวตรงเส้นหนึ่งเป็นเส้นสะท้อน (line of reflection หรือ mirror line) ”



ทัชมาฮาล



พระที่นั่งไอศวรรย์ทิพยอาสน์

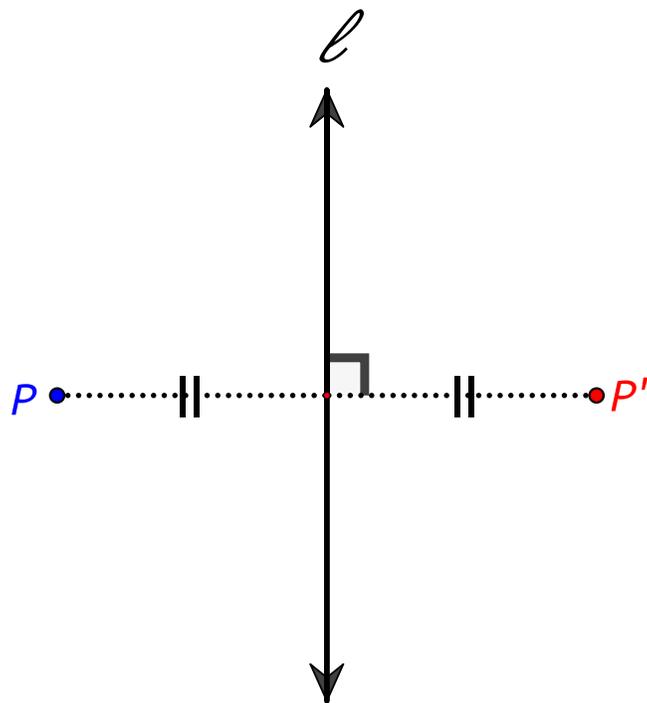


นครวัด นครธม



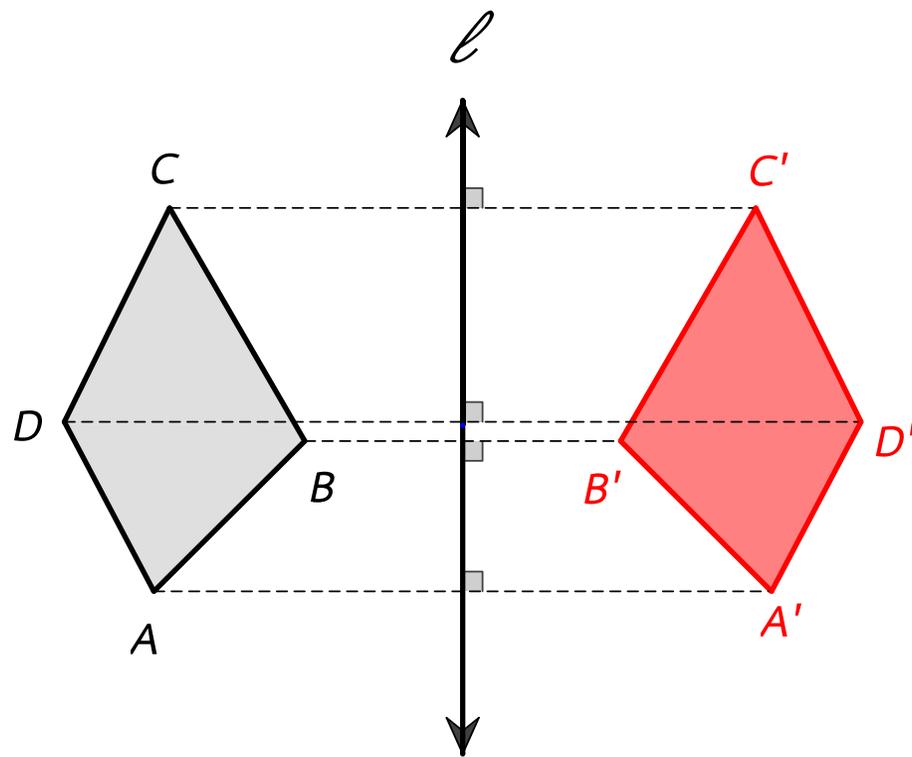
การสะท้อนบนระนาบ เป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีเส้นตรง l ที่ตรึงเส้นหนึ่ง เป็นเส้นสะท้อน แต่ละจุด P บนระนาบ จะมีจุด P' เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด P โดยที่

1. ถ้าจุด P ไม่อยู่บนเส้นสะท้อน แล้วเส้นสะท้อนจะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{PP'}$

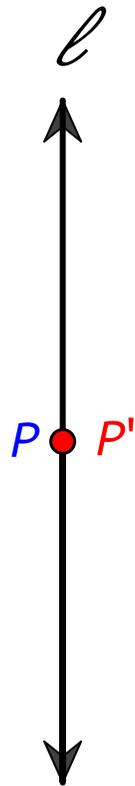


ตัวอย่าง การสะท้อนที่มีเส้นตรง l เป็นเส้นสะท้อน

กรณีที่ 1 ทุกจุดทุกบนรูปต้นแบบไม่อยู่บนเส้นตรง l

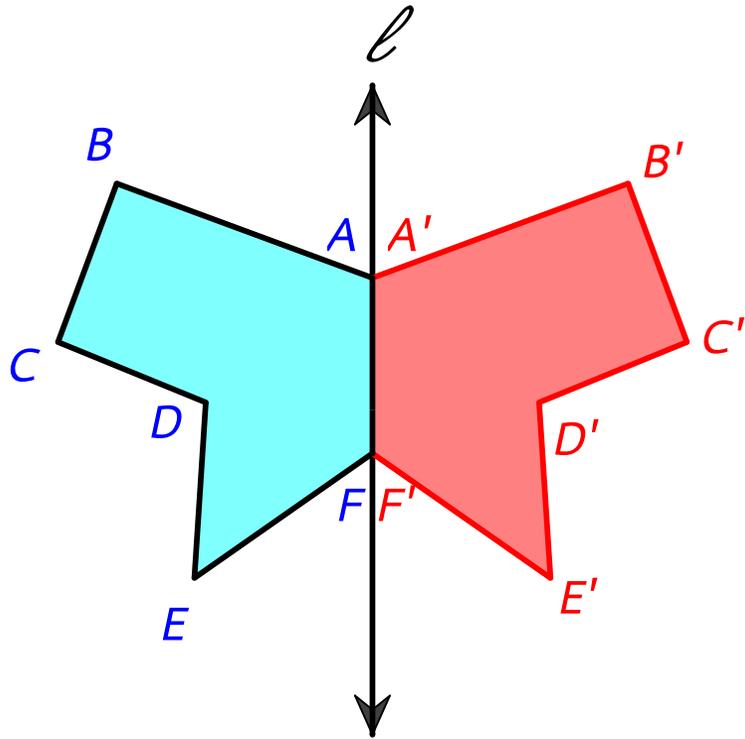


2. ถ้าจุด P อยู่บนเส้นตรง ℓ แล้วจุด P และจุด P' เป็นจุดเดียวกัน

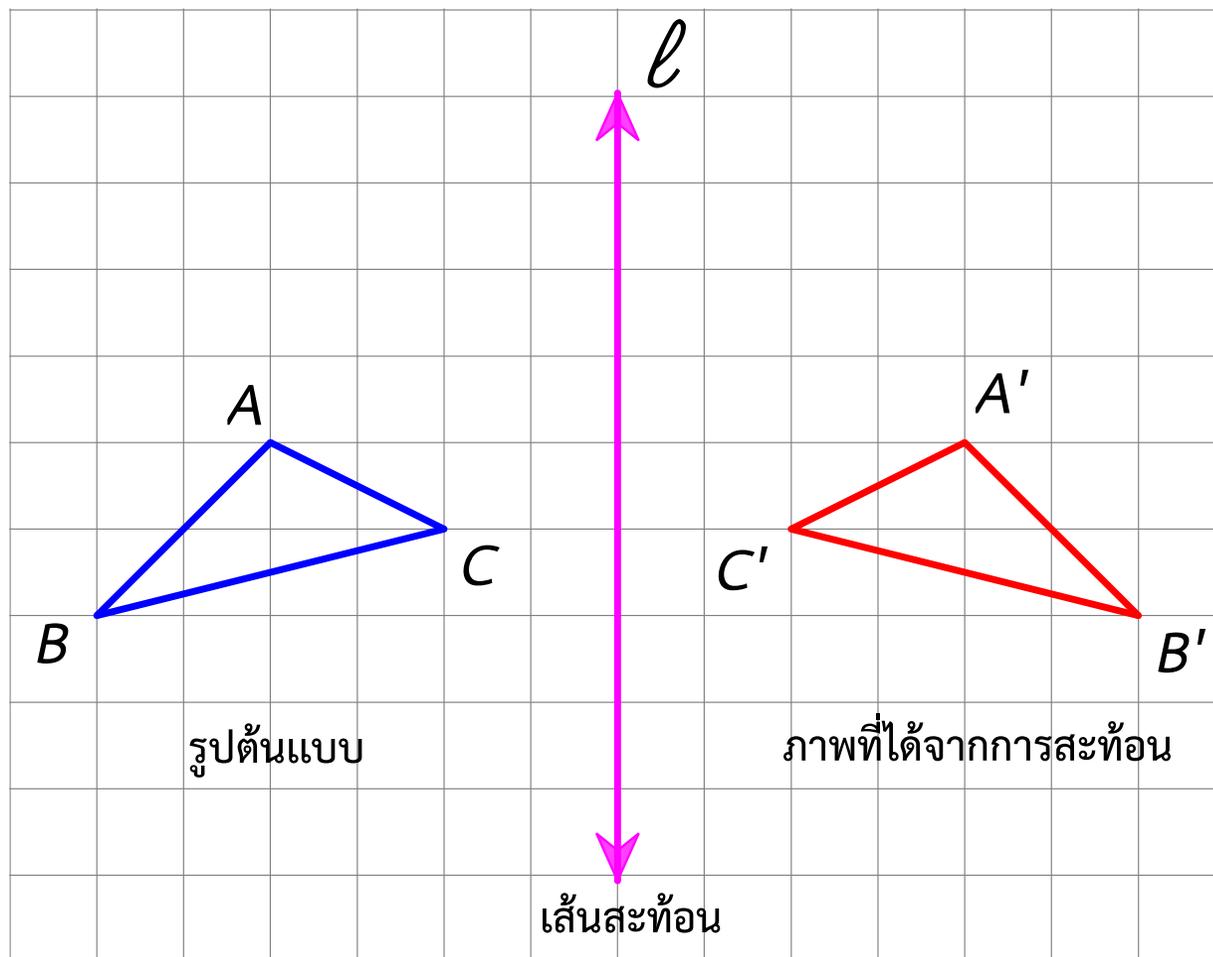


ตัวอย่าง การสะท้อนที่มีเส้นตรง l เป็นเส้นสะท้อน

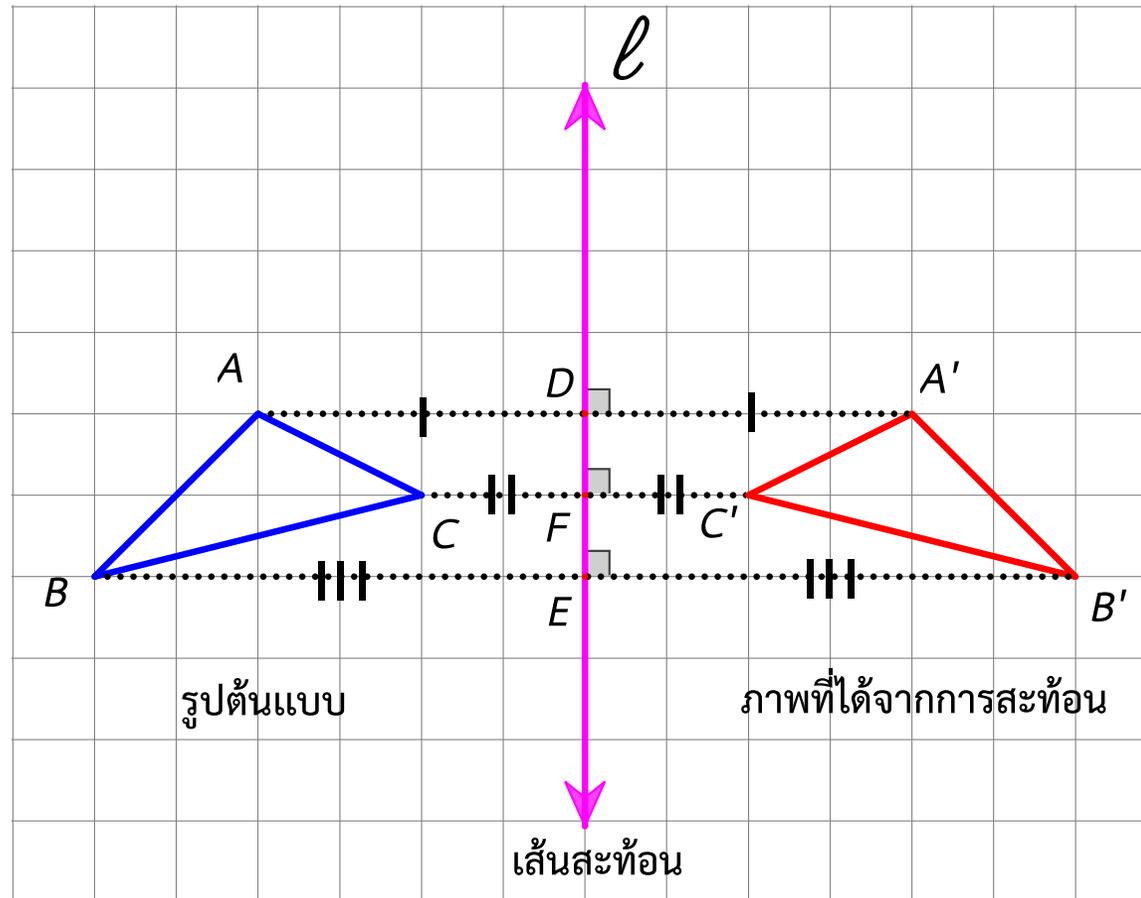
กรณีที่ 2 มีบางจุดบนรูปต้นแบบอยู่บนเส้นตรง l

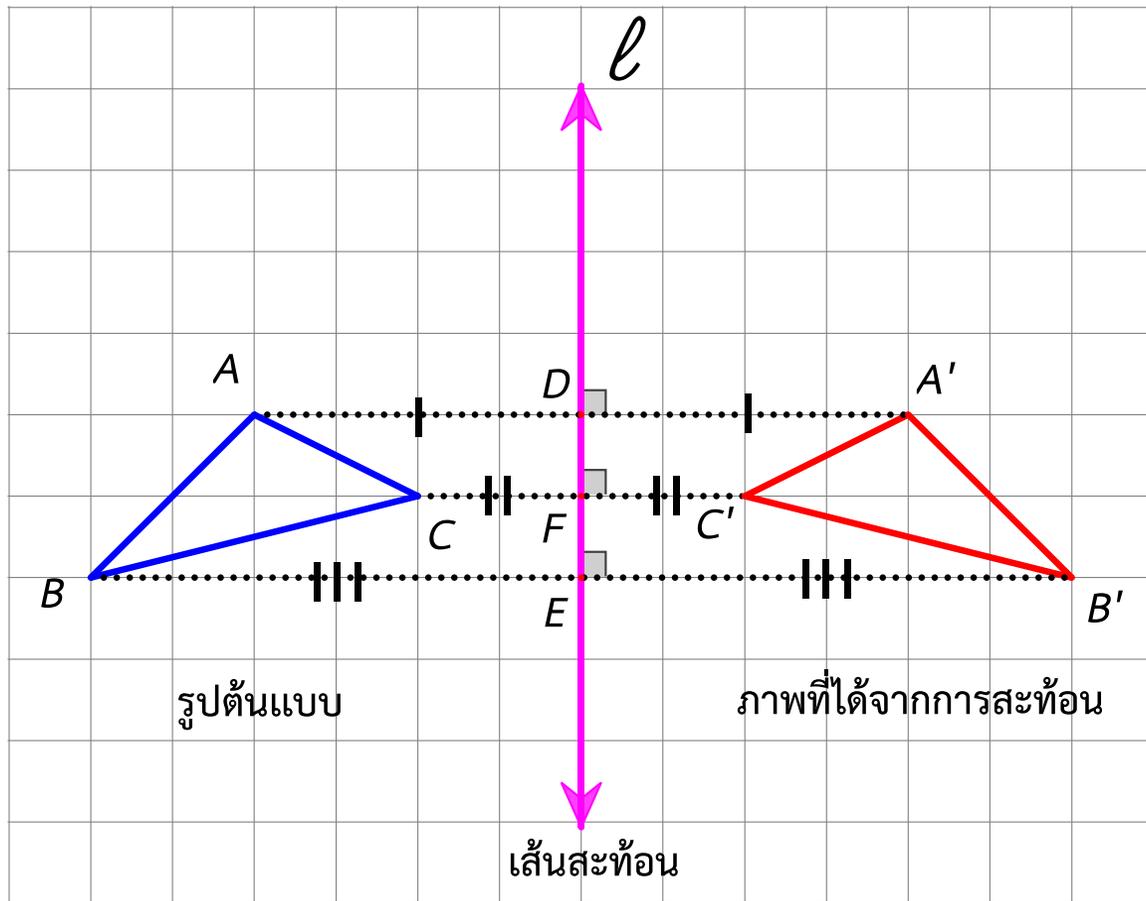


พิจารณา รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC ด้วย
เส้นสะท้อน l



ลาก $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ ตัดเส้นตรง l ที่จุด D , E , F ตามลำดับ เมื่อเส้นตรง l เป็นเส้น
 สະท้อน จะได้ว่าเส้นตรง l แบ่งครึ่ง และตั้งฉากกับ $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$



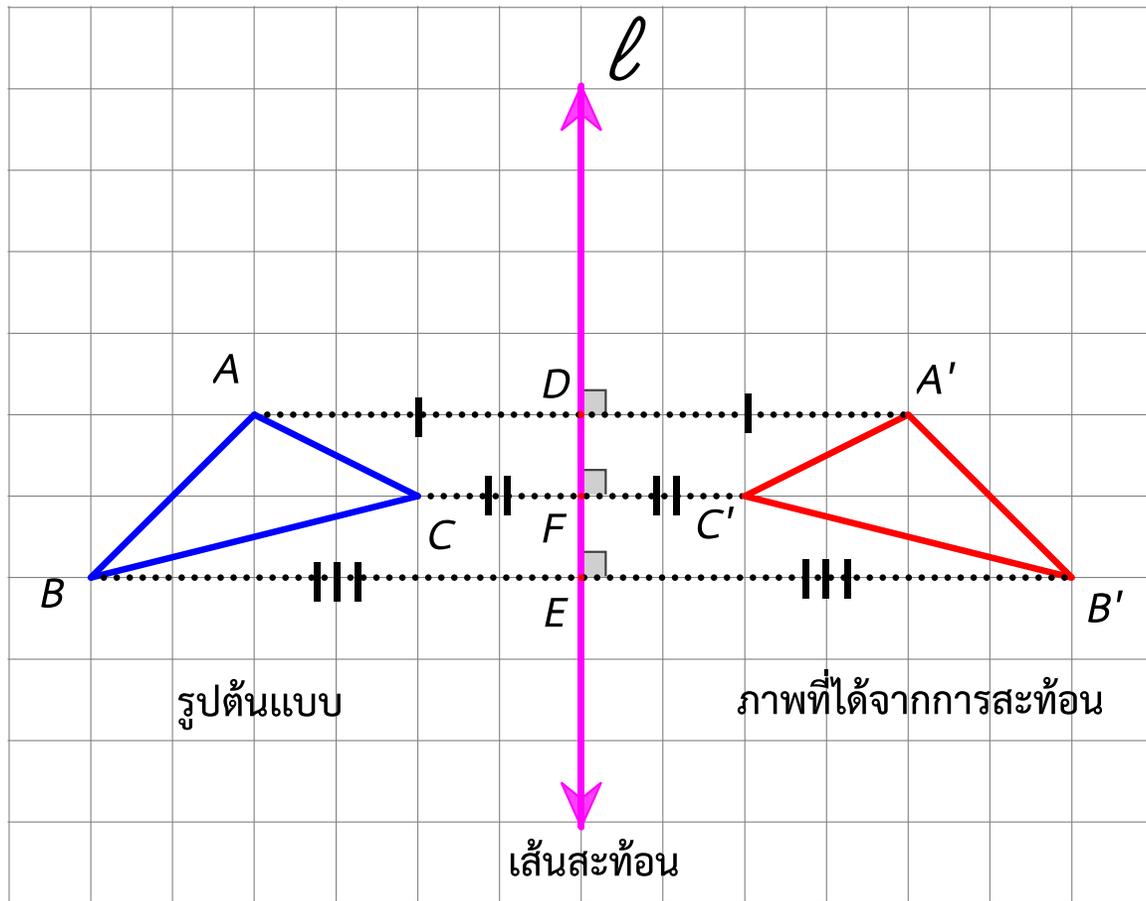


จุด A สะท้อนไปที่จุด A' จะได้ระยะตั้งฉากจากจุด A ไปยังเส้นสะท้อนเท่ากับระยะตั้งฉากจากจุด A' ไปยังเส้นสะท้อน

จุด B สะท้อนไปที่จุด B' จะได้ระยะตั้งฉากจากจุด B ไปยังเส้นสะท้อนเท่ากับระยะตั้งฉากจากจุด B' ไปยังเส้นสะท้อน

จุด C สะท้อนไปที่จุด C' จะได้ระยะตั้งฉากจากจุด C ไปยังเส้นสะท้อนเท่ากับระยะตั้งฉากจากจุด C' ไปยังเส้นสะท้อน



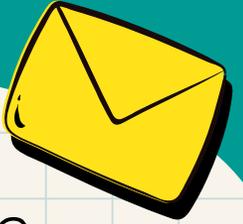


$AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$
 รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ มีลักษณะเหมือนภาพที่เกิด
 จากการพลิกรูปสามเหลี่ยม ABC ข้ามเส้นสะท้อน l
 และรูปสามเหลี่ยม ABC ทับรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$
 ได้สนิท





สมบัติของการสะท้อน



01

รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อน สามารถทับกันได้สนิทโดยต้องพลิกรูปหรือพลิกภาพที่ได้จากการสะท้อนอย่างหนึ่งอย่างใด หรือกล่าวว่า รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อนเท่ากันทุกประการ

02

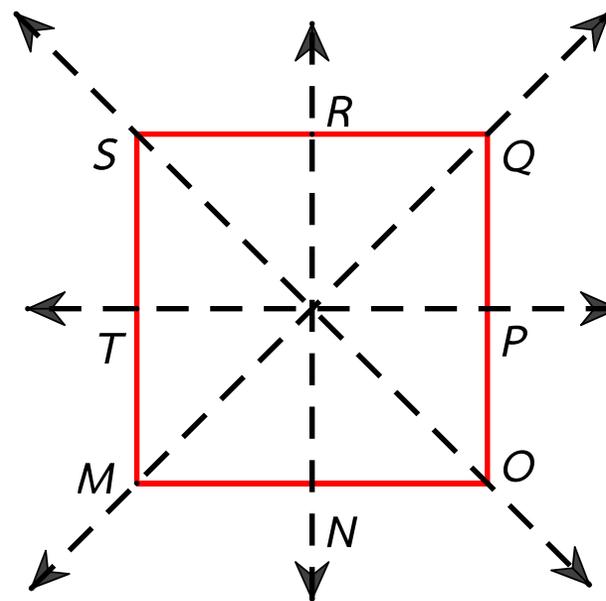
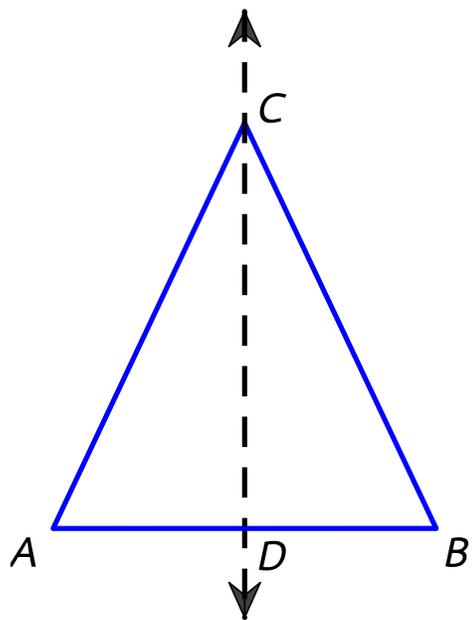
จุดที่สมนัยกันแต่ละคู่จะอยู่ห่างจากเส้นสะท้อนเท่ากัน หรือเส้นสะท้อนจะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อน

03

ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกันบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อน จะขนานกัน



รูปเรขาคณิตที่สามารถหารอยพับและพับรูปทั้งสองข้างของรอยพับให้ทับกันสนิทได้
เรียกว่า **รูปสมมาตรบนเส้น** และเรียกรอยพับว่า **แกนสมมาตร** (axis of symmetry)



เราสามารถสร้างรูปสมมาตรบนเส้นได้ โดยใช้ความรู้เรื่องการสะท้อน
โดยมีแกนสมมาตรเป็นเส้นสะท้อน

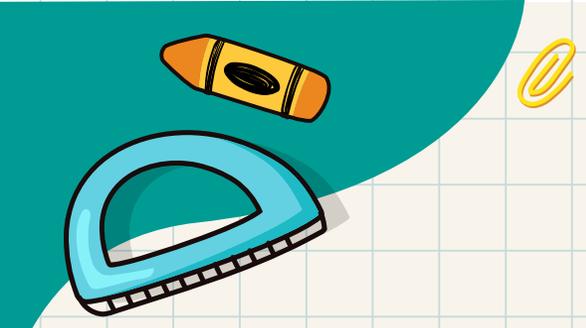




ให้ทำข้อที่ 1 และข้อ 2





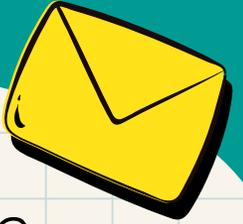


“ การสะท้อนเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีการพลิกรูป
โดยมีเส้นในแนวตรงเส้นหนึ่งเป็นเส้นสะท้อน
(line of reflection หรือ mirror line) ”





สมบัติของการสะท้อน



01

รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อน สามารถทับกันได้สนิทโดยต้องพลิกรูปหรือพลิกภาพที่ได้จากการสะท้อนอย่างหนึ่งอย่างใด หรือกล่าวว่า รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อนเท่ากันทุกประการ

02

จุดที่สมนัยกันแต่ละคู่จะอยู่ห่างจากเส้นสะท้อนเท่ากัน หรือเส้นสะท้อนจะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อน

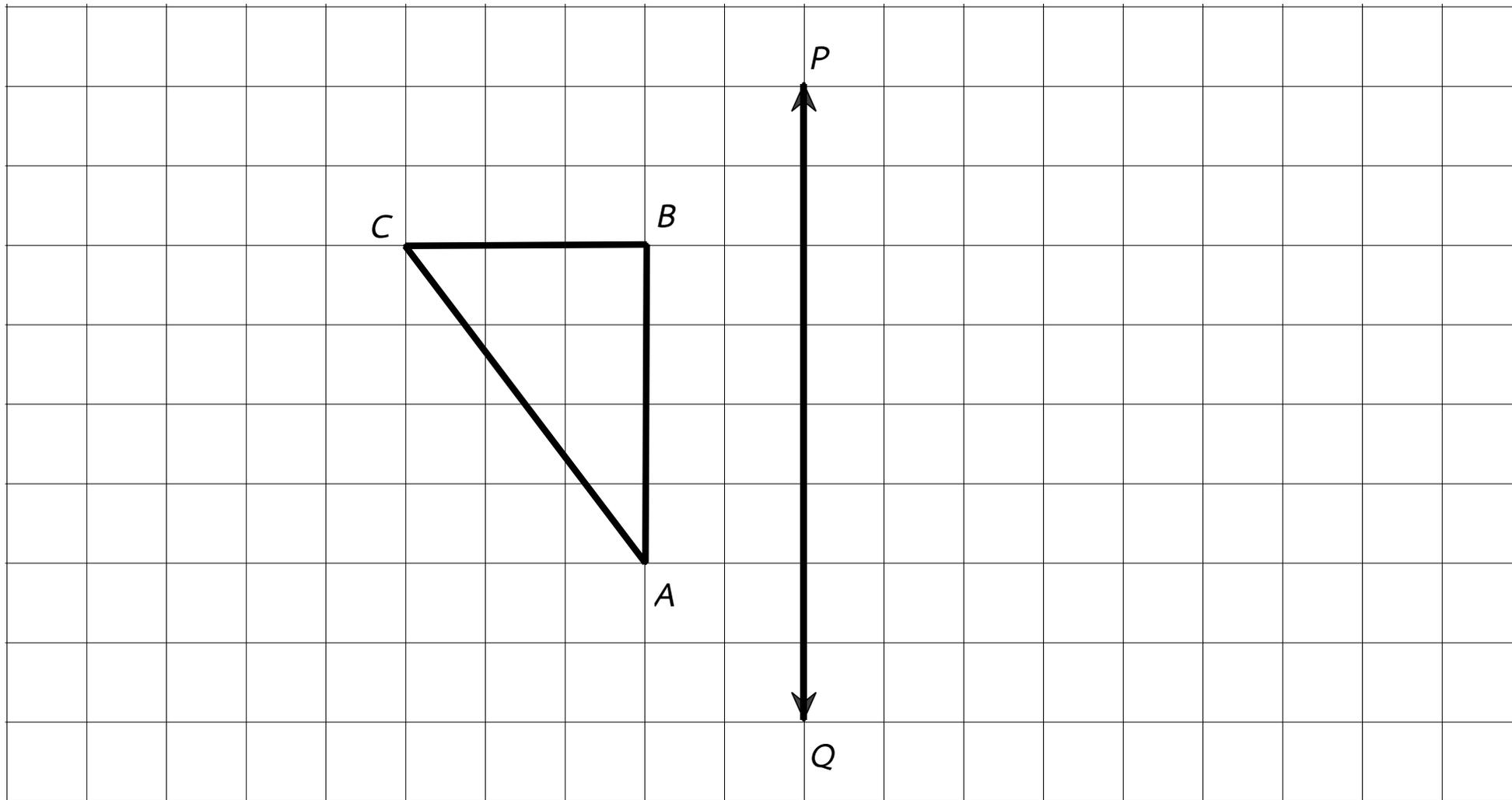
03

ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกันบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อน จะขนานกัน



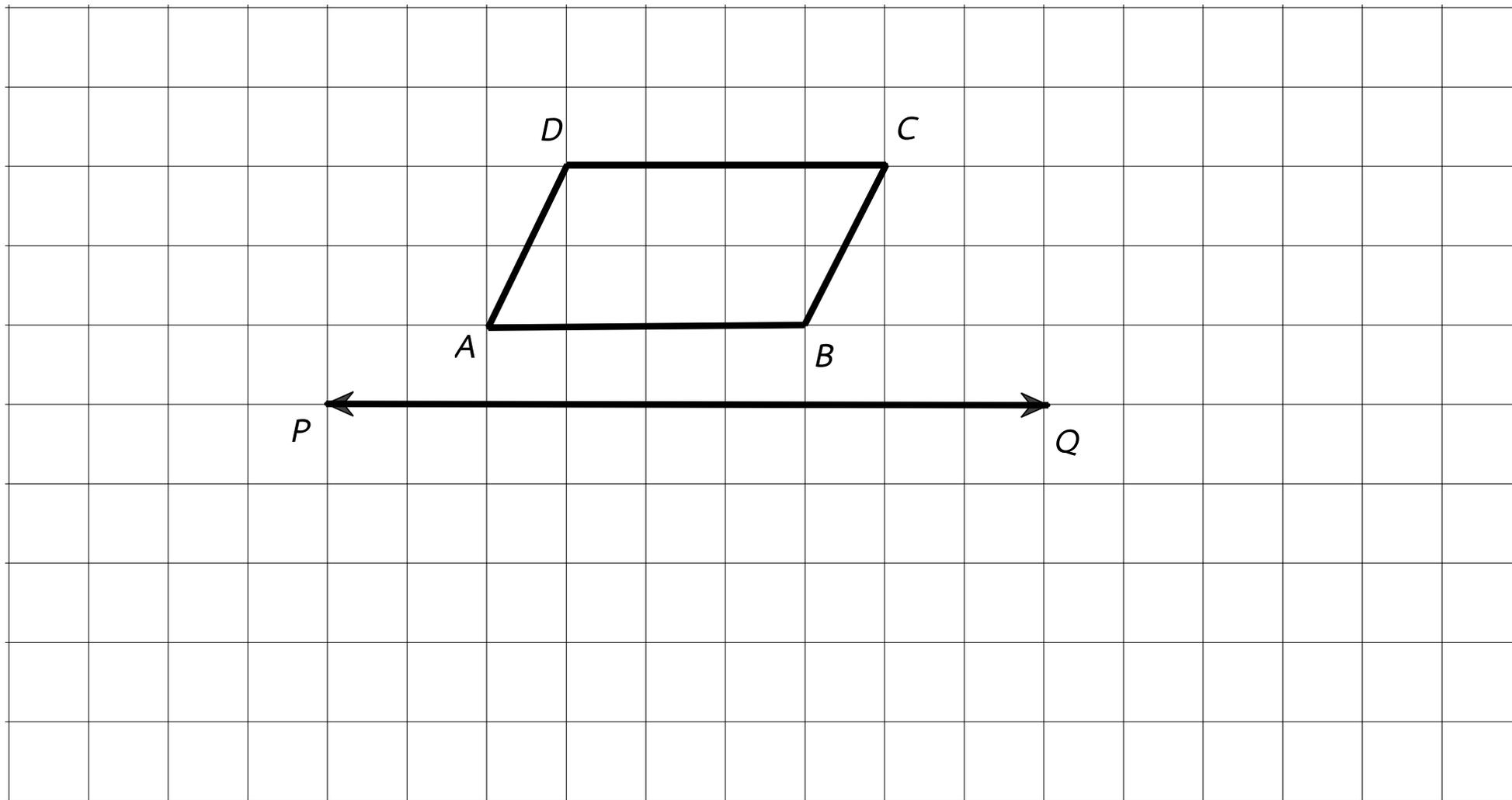
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนภาพที่ได้จากการสะท้อนของรูปต่อไปนี้

ข้อที่ 1



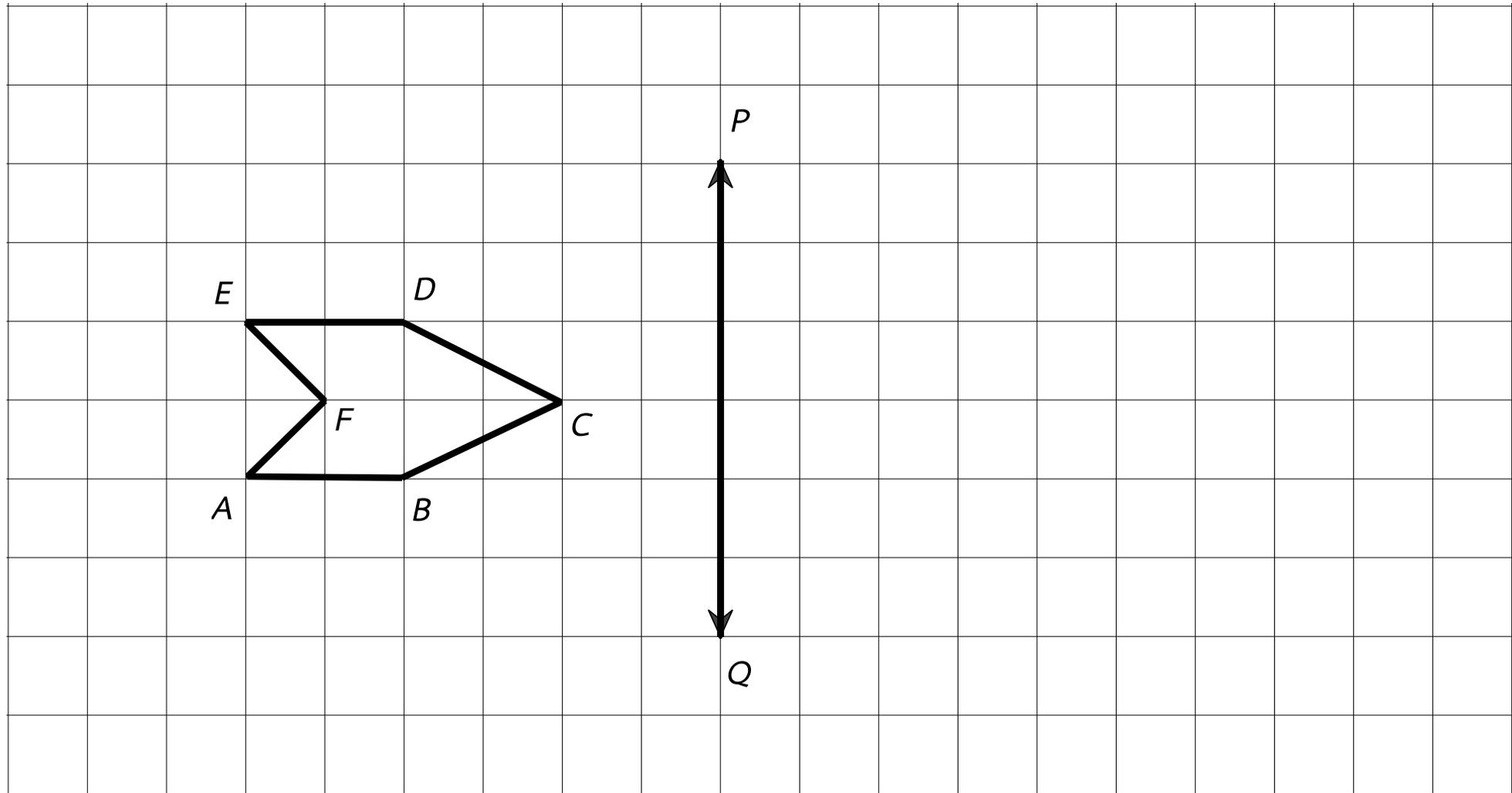
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนภาพที่ได้จากการสะท้อนของรูปต่อไปนี้

ข้อที่ 2



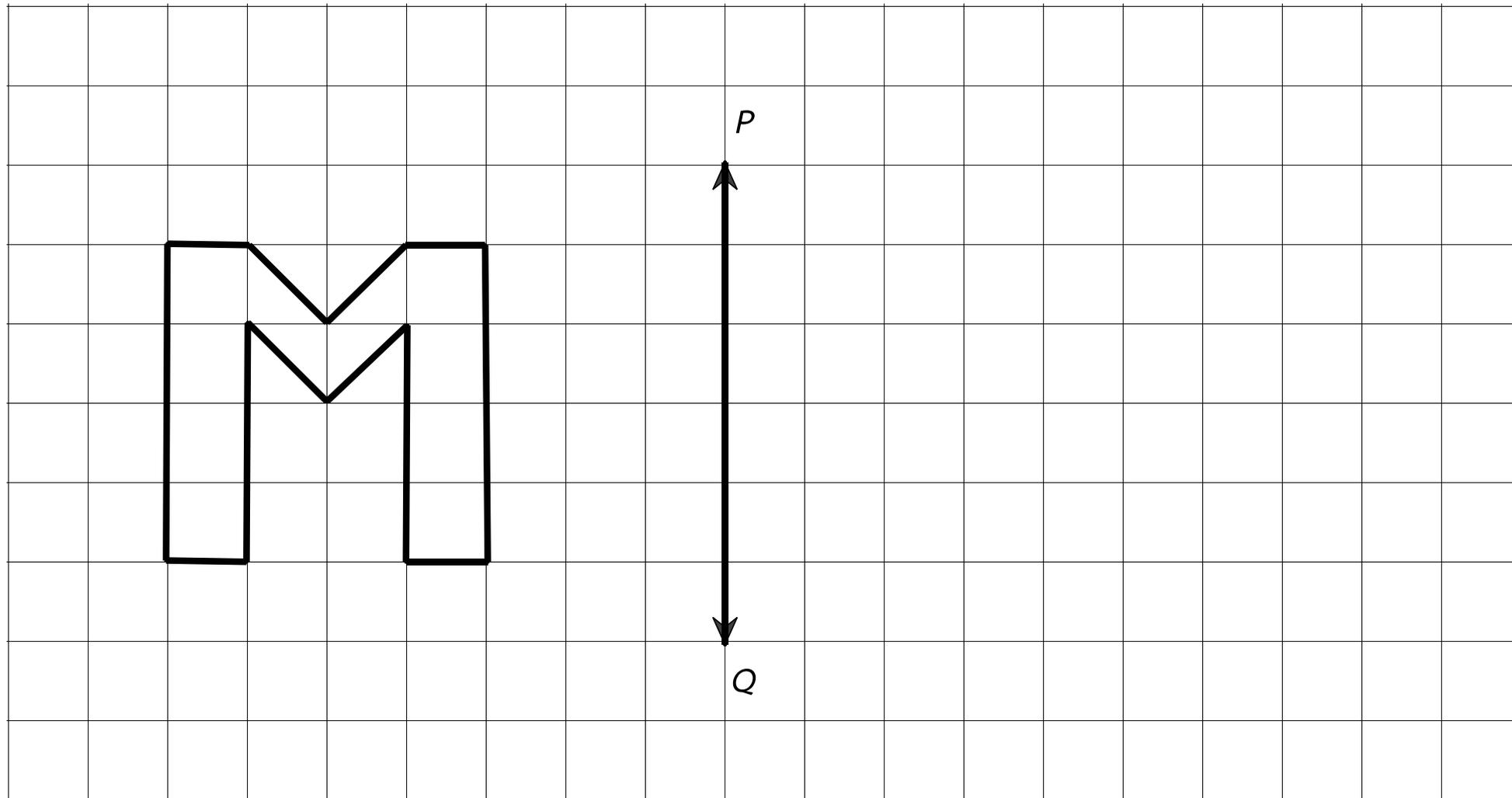
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนภาพที่ได้จากการสะท้อนของรูปต่อไปนี้

ข้อที่ 3



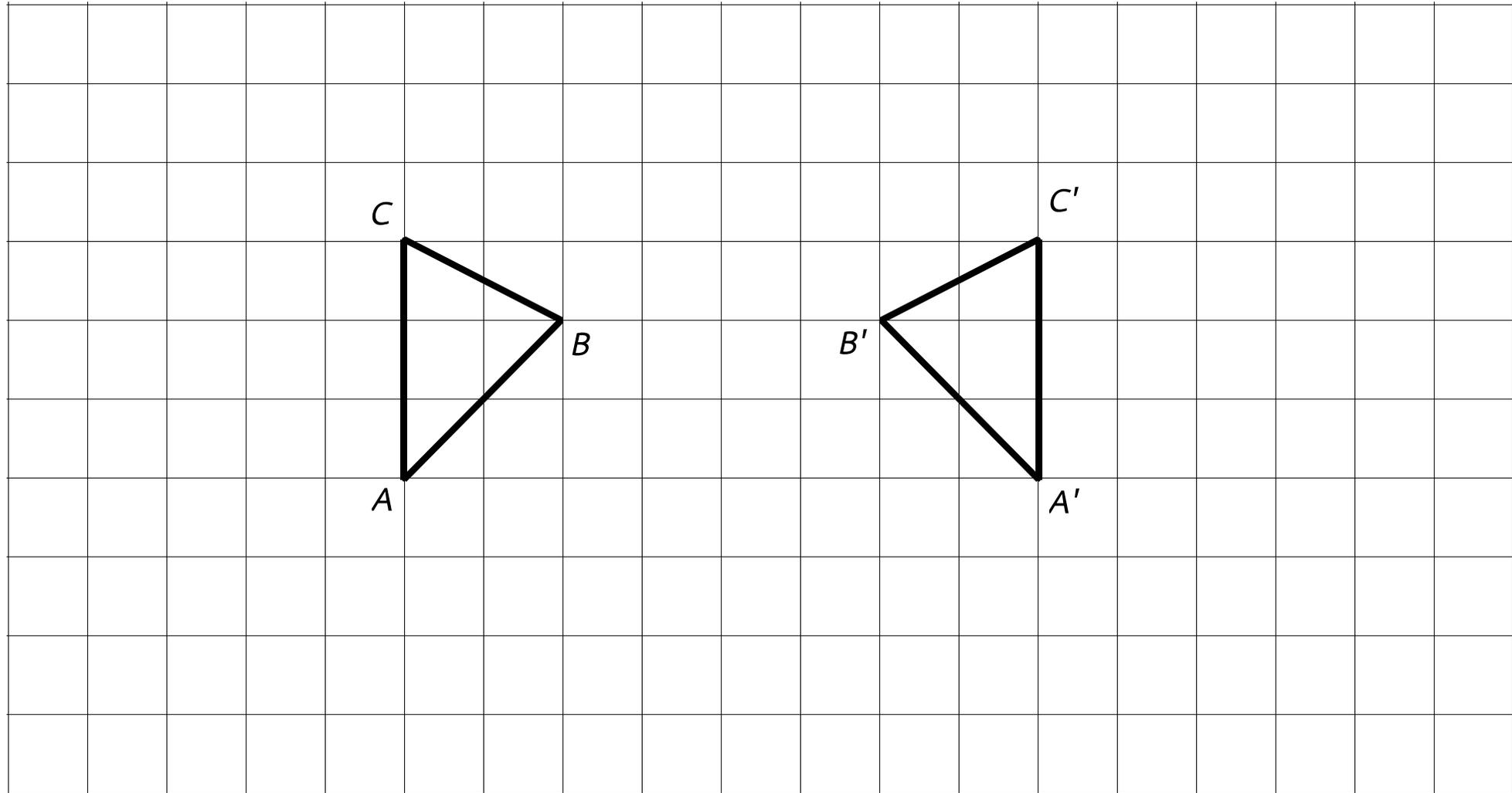
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนภาพที่ได้จากการสะท้อนของรูปต่อไปนี้

ข้อที่ 4



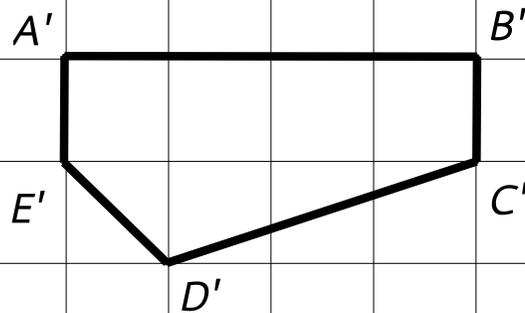
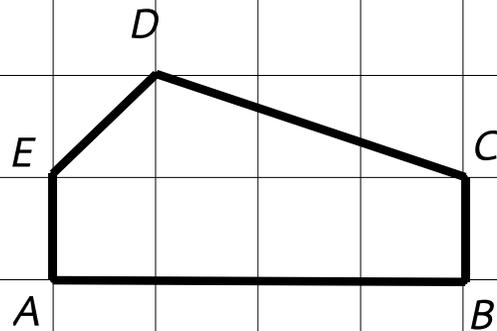
ตัวอย่างที่ 2 จงหาเส้นสะท้อนจากภาพที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ข้อที่ 1



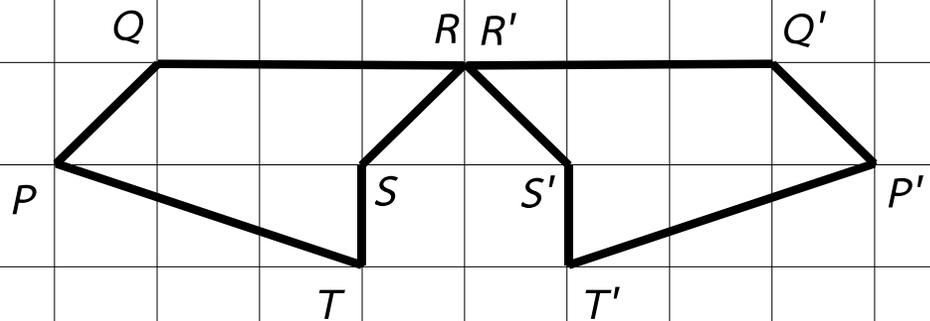
ตัวอย่างที่ 2 จงหาเส้นสะท้อนจากภาพที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ข้อที่ 2



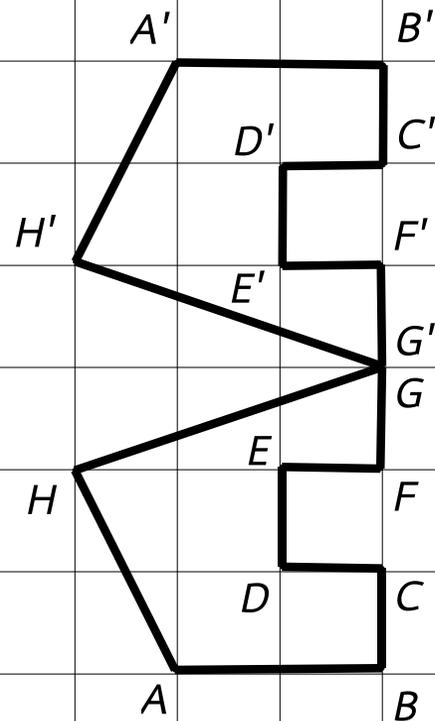
ตัวอย่างที่ 2 จงหาเส้นสะท้อนจากภาพที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ข้อที่ 3



ตัวอย่างที่ 2 จงหาเส้นสะท้อนจากภาพที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ข้อที่ 4



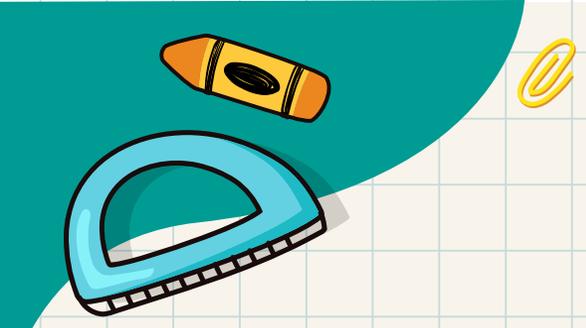


ให้ทำข้อที่ 3 และข้อ 4



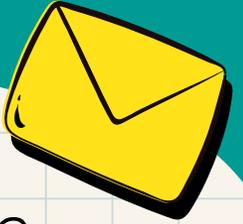


“ การสะท้อนเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีการพลิกรูป
โดยมีเส้นในแนวตรงเส้นหนึ่งเป็นเส้นสะท้อน
(line of reflection หรือ mirror line) ”





สมบัติของการสะท้อน



01

รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อน สามารถทับกันได้สนิทโดยต้องพลิกรูปหรือพลิกภาพที่ได้จากการสะท้อนอย่างหนึ่งอย่างใด หรือกล่าวว่า รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อนเท่ากันทุกประการ

02

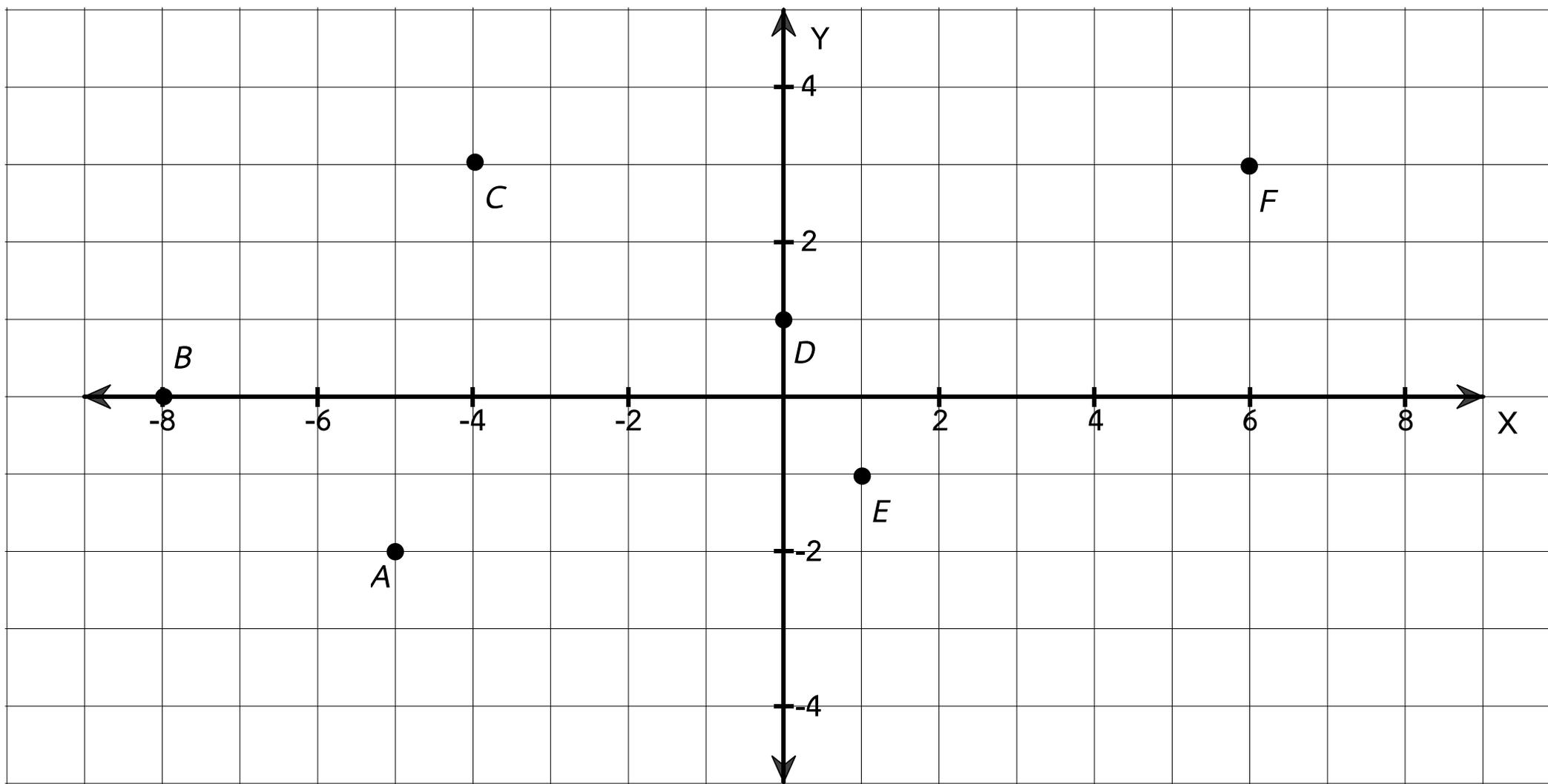
จุดที่สมนัยกันแต่ละคู่จะอยู่ห่างจากเส้นสะท้อนเท่ากัน หรือเส้นสะท้อนจะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อน

03

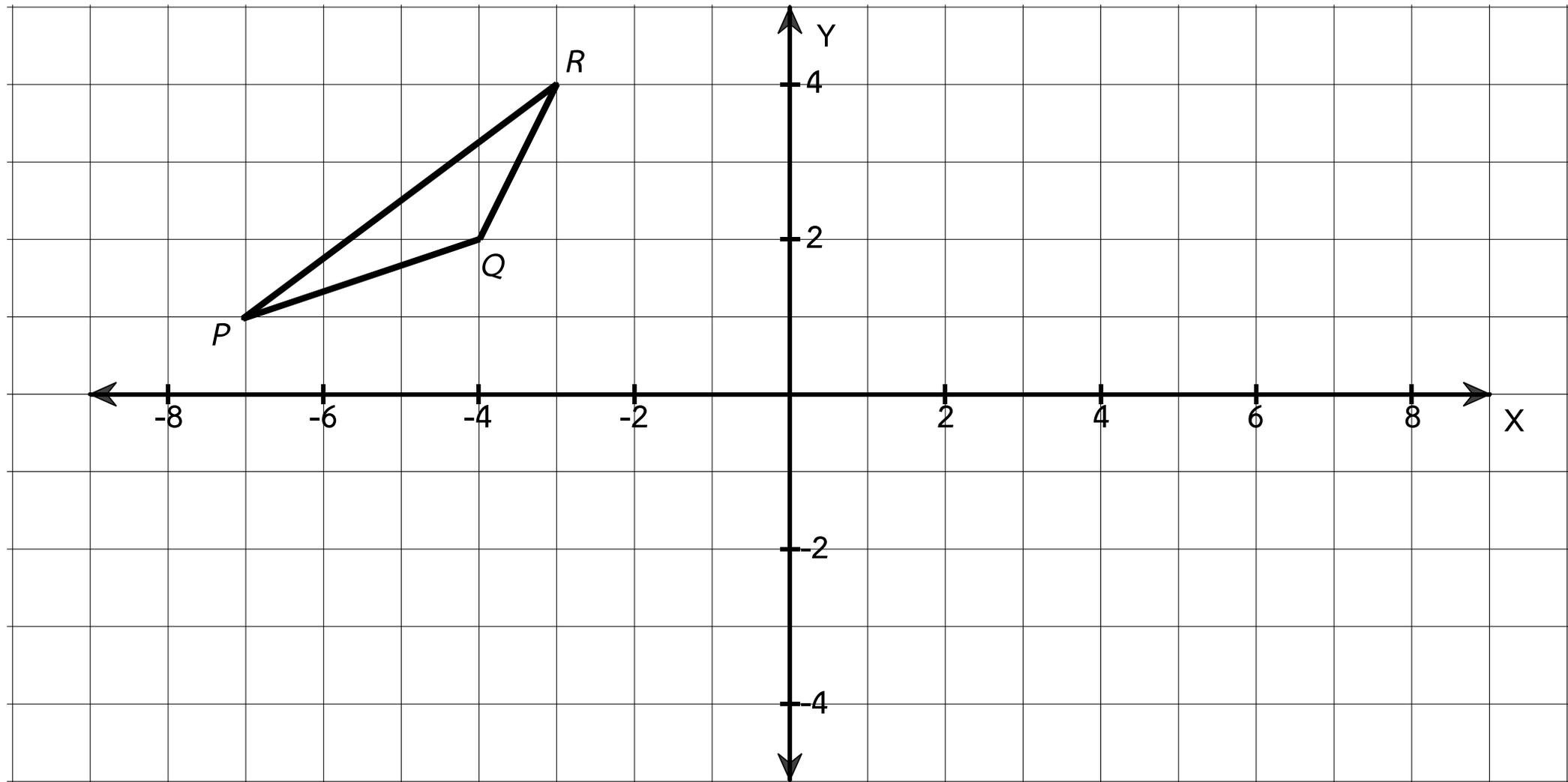
ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกันบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อน จะขนานกัน



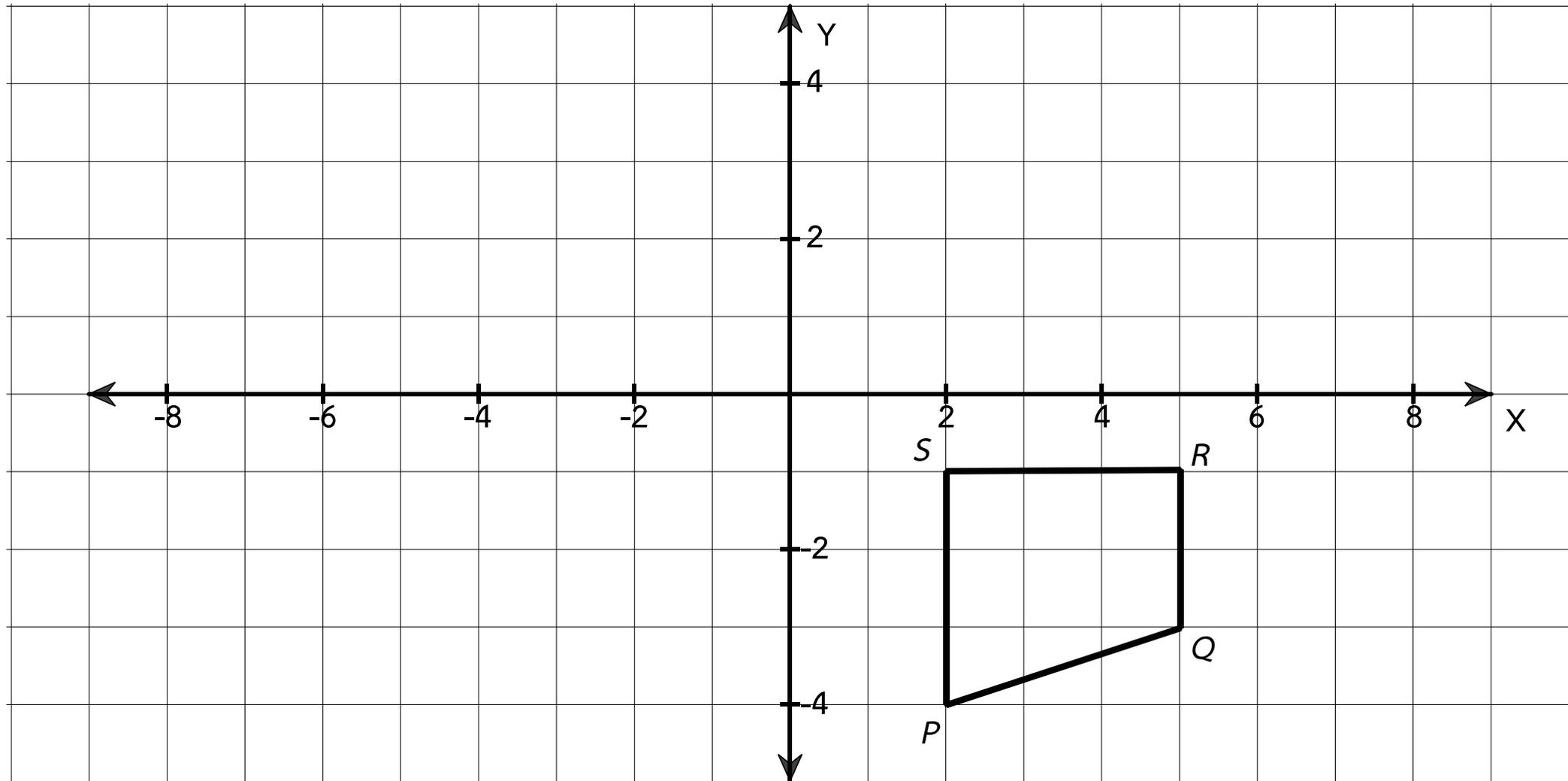
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนภาพที่ได้จากการสะท้อนของจุดที่กำหนดให้ โดยใช้แกน X เป็นเส้นสะท้อน พร้อมทั้งบอกพิกัดของจุด



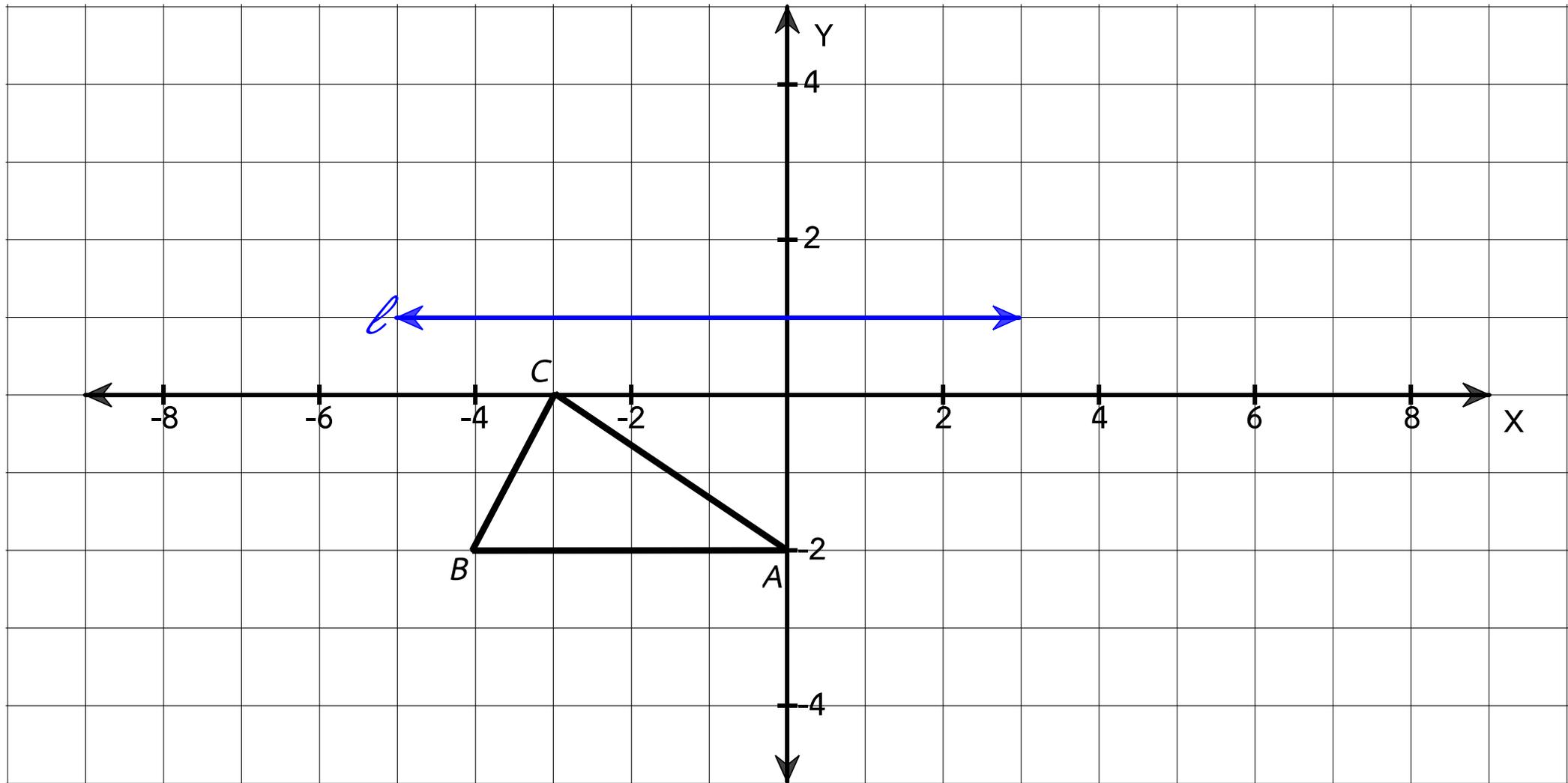
ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\triangle PQR$ และให้แกน Y เป็นเส้นสะท้อน จงหา $\triangle P'Q'R'$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน $\triangle PQR$ และหาพิกัดของจุด P', Q', R'



ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\square PQRS$ และให้แกน X เป็นเส้นสะท้อน จงหา $\square P'Q'R'S'$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน $\square PQRS$ และหาพิกัดของจุด P', Q', R', S'



ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $\triangle ABC$ และให้เส้นตรง l เป็นเส้นสะท้อน จงหา $\triangle A'B'C'$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน $\triangle ABC$ และหาพิกัดของจุด A', B', C'



การประยุกต์ของการสะท้อน



ลายผ้า



ลวดลายประตู

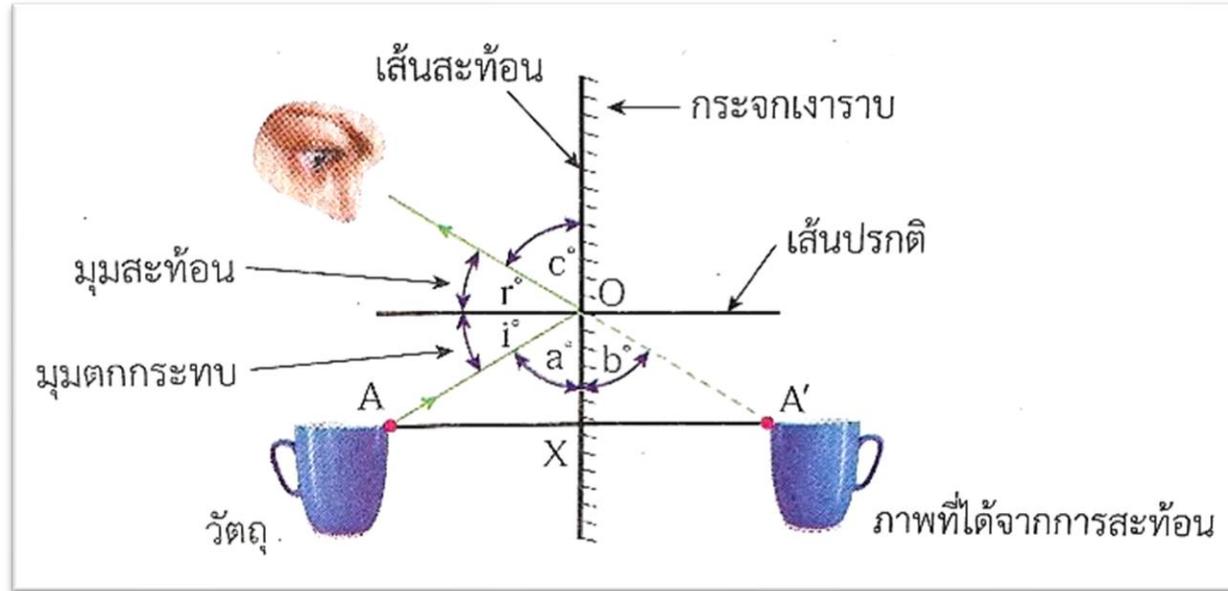


ถุงมือ



การประยุกต์ของการสะท้อน

การสะท้อนของแสง ซึ่งเป็นไปตามกฎการสะท้อนของแสง คือ ขนาดของมุมตกกระทบเท่ากับขนาดของมุมสะท้อน



การเกิดภาพที่ได้จากการสะท้อนในกระจกเงาราบ



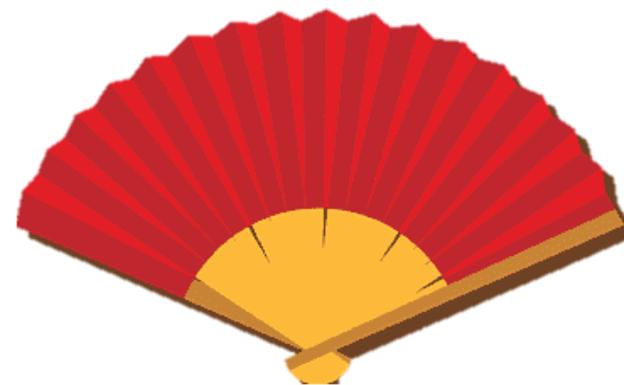
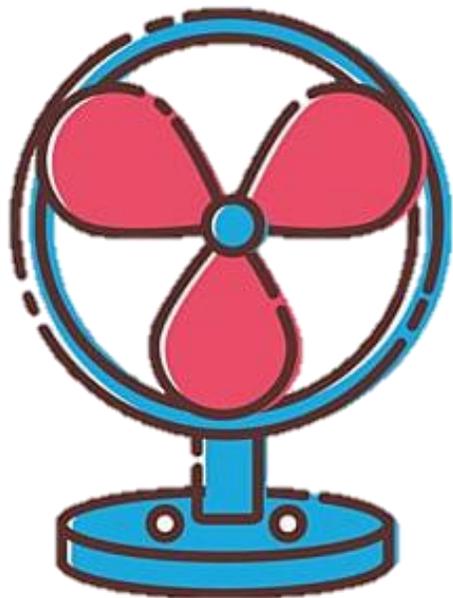


ให้ทำข้อที่ 5 และข้อ 6





4.3 การหมุน



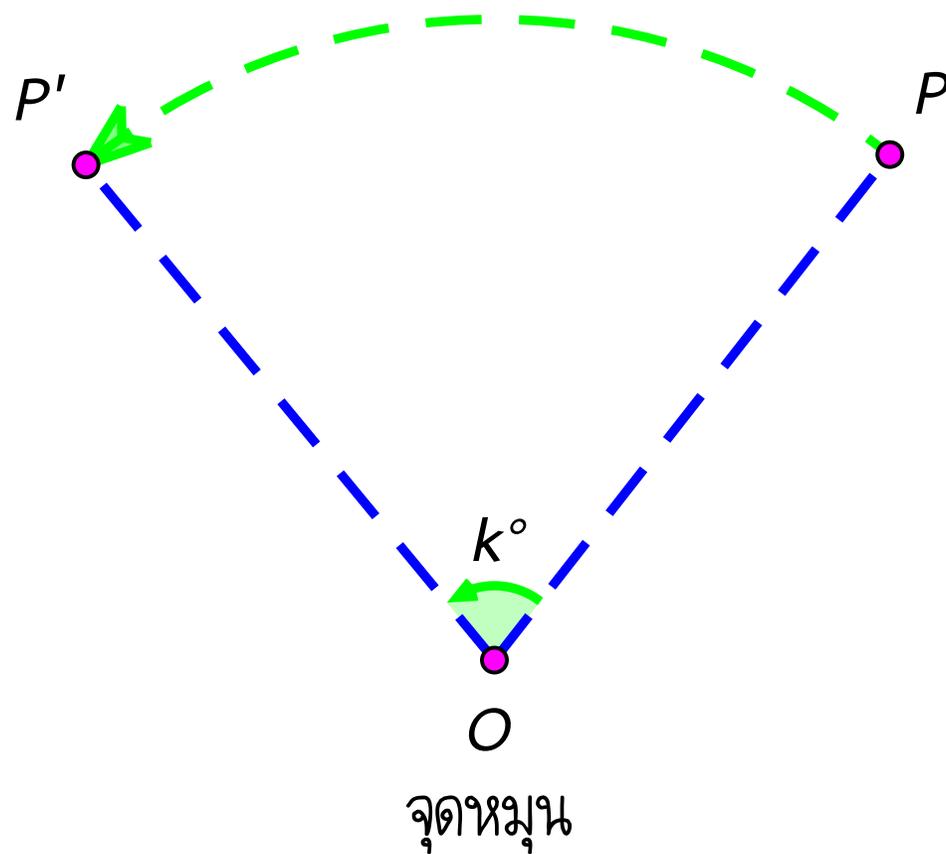
การหมุนของใบพัดลม การหมุนของเข็มนาฬิกา หรือการคลี่พัด เป็นตัวอย่างของ
การเคลื่อนที่รอบจุด ๆ หนึ่ง ซึ่งอาจจะมีทิศทางตามเข็มนาฬิกาหรือทวนเข็มนาฬิกา

การหมุน

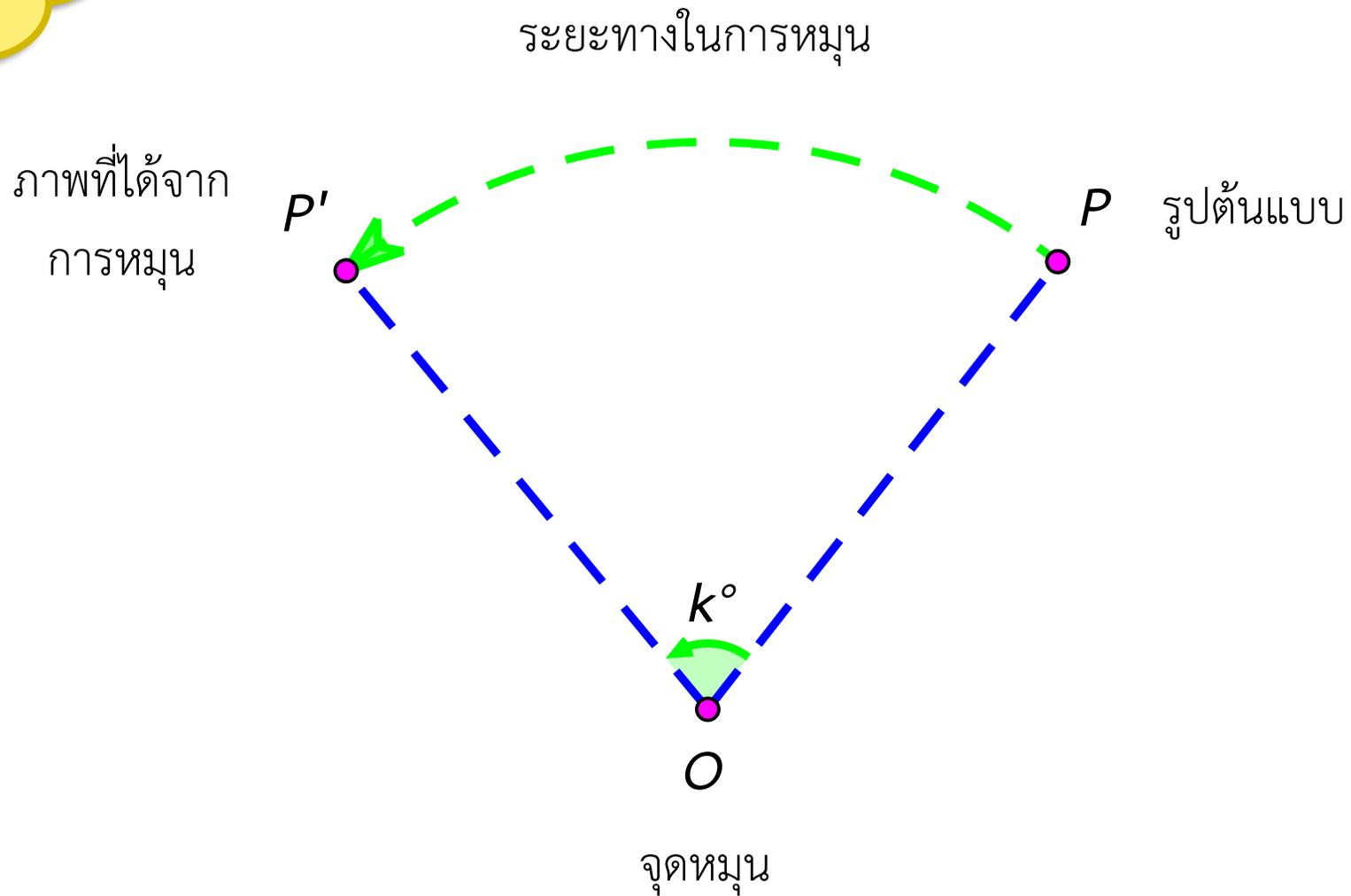
ภาพที่ได้จาก
การหมุน

ระยะทางในการหมุน

รูปต้นแบบ



การหมุน

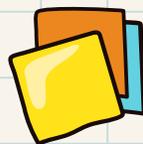


การหมุน

“ การหมุนบนระนาบเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีจุด O ที่ตรึงจุดหนึ่งเป็น **จุดหมุน** หรือ **จุดศูนย์กลางของการหมุน (center of rotation)** แต่ละจุด P บนระนาบ มีจุด P' เป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด P รอบจุด O ตามทิศทางที่กำหนดด้วยมุมที่มีขนาด k องศา โดยที่ $OP = OP'$ ”



สมบัติของการหมุน



01

รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุน สามารถทับกันได้สนิทโดยไม่ต้องพลิกรูป หรือกล่าวว่า รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนเท่ากันทุกประการ

02

จุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนจุดนั้น จะอยู่บนวงกลมเดียวกันที่มีจุดหมุน เป็นจุดศูนย์กลาง แต่วงกลมทั้งหลายเหล่านี้ไม่จำเป็นต้องมีรัศมียาวเท่ากัน

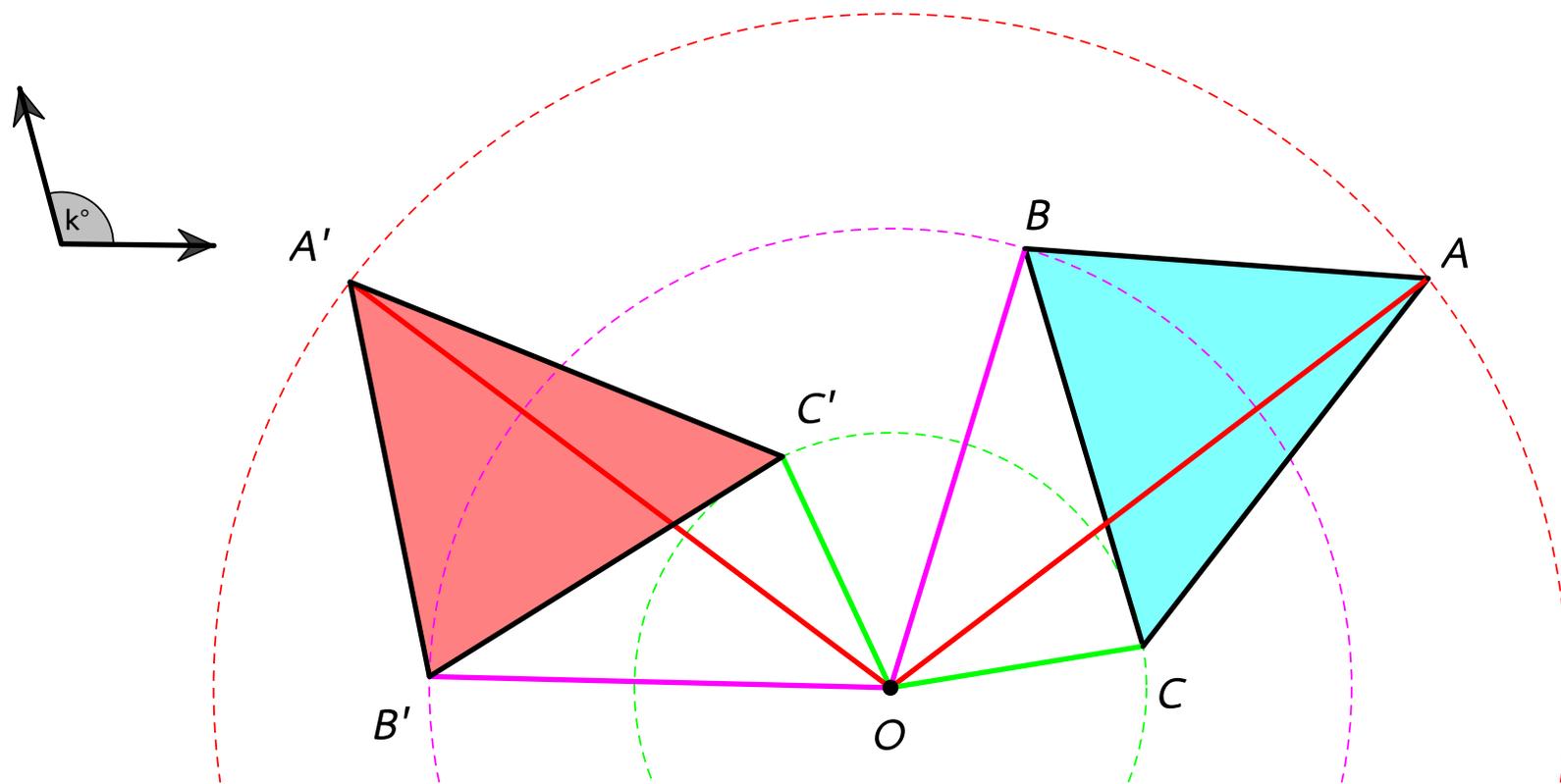
03

เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดบน รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนจุดนั้น จะผ่านจุดหมุนเสมอ



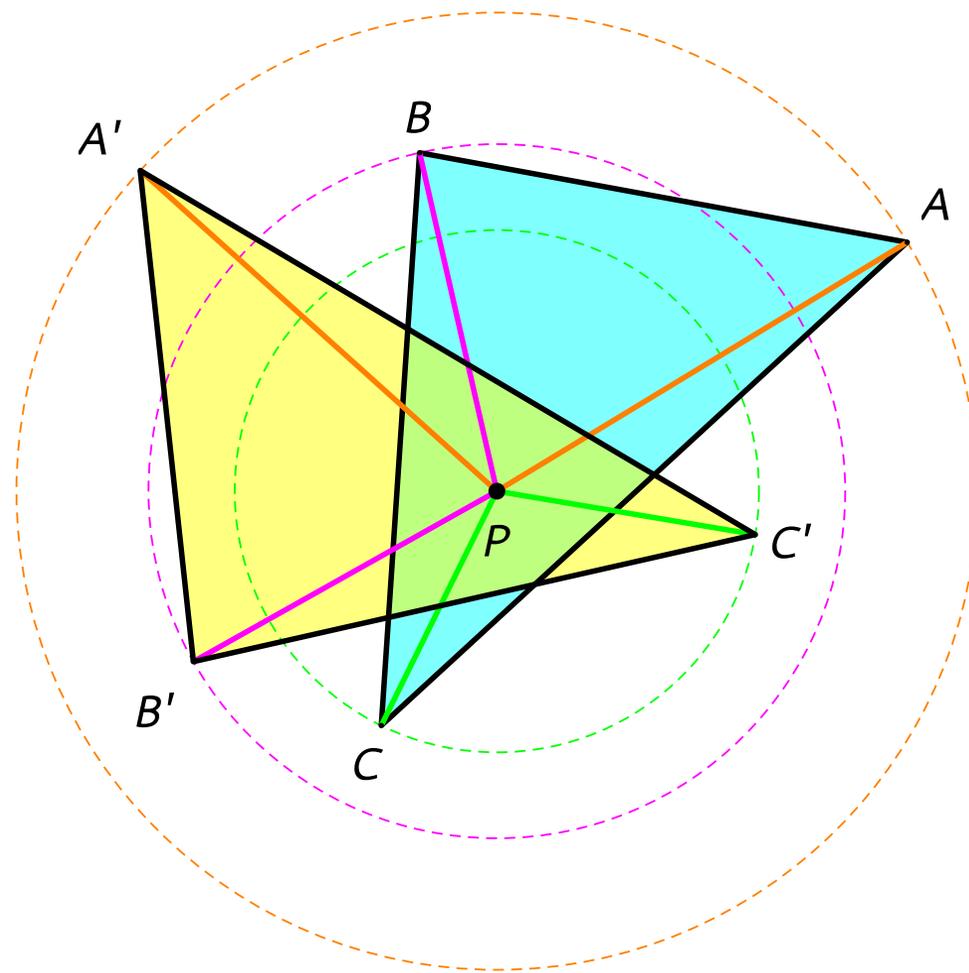
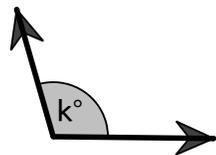
การหมุน

การหมุนโดยจุดหมุนอยู่ภายนอกรูปต้นแบบ



การหมุน

การหมุนโดยจุดหมุนอยู่ภายในรูปต้นแบบ



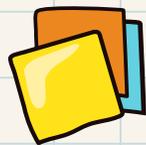


ให้ทำข้อที่ 1

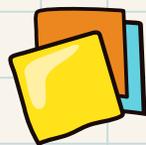


การหมุน

“ การหมุนบนระนาบเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีจุด O ที่ตรึงจุดหนึ่งเป็น **จุดหมุน** หรือ **จุดศูนย์กลางของการหมุน (center of rotation)** แต่ละจุด P บนระนาบ มีจุด P' เป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด P รอบจุด O ตามทิศทางที่กำหนดด้วยมุมที่มีขนาด k องศา โดยที่ $OP = OP'$ ”



สมบัติของการหมุน



01

รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุน สามารถทับกันได้สนิทโดยไม่ต้องพลิกรูป หรือกล่าวว่า รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนเท่ากันทุกประการ

02

จุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนจุดนั้น จะอยู่บนวงกลมเดียวกันที่มีจุดหมุน เป็นจุดศูนย์กลาง แต่วงกลมทั้งหลายเหล่านี้ไม่จำเป็นต้องมีรัศมียาวเท่ากัน

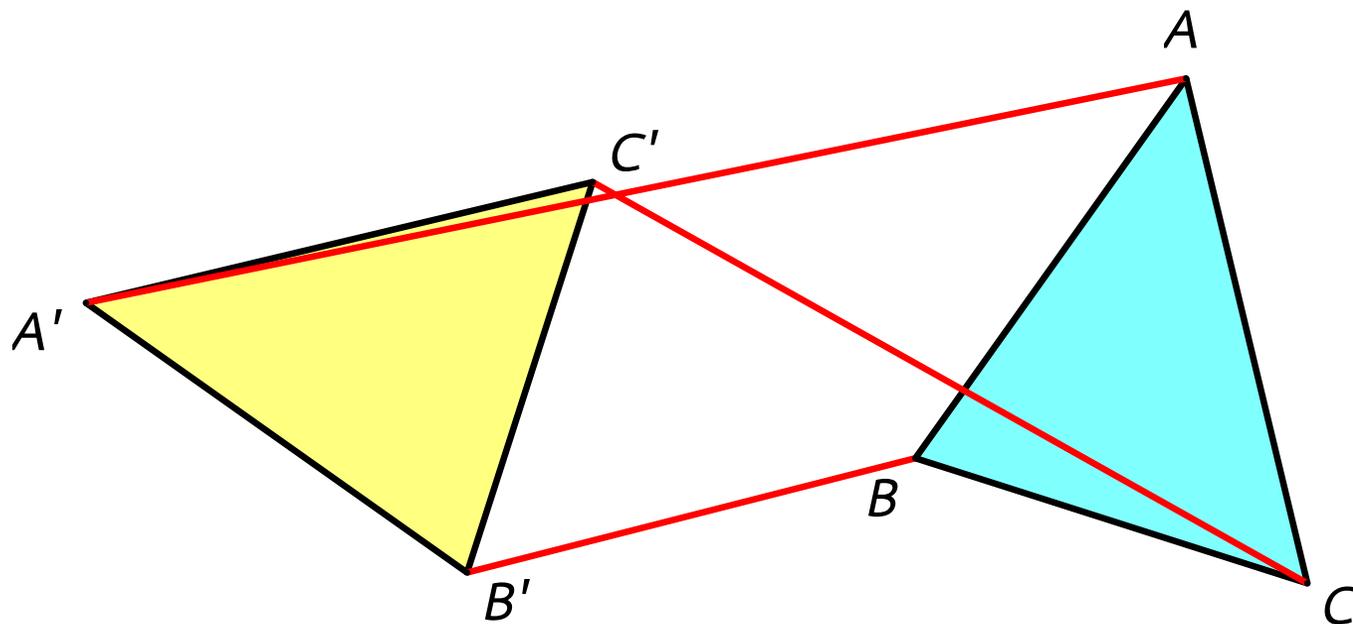
03

เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดบน รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนจุดนั้น จะผ่านจุดหมุนเสมอ



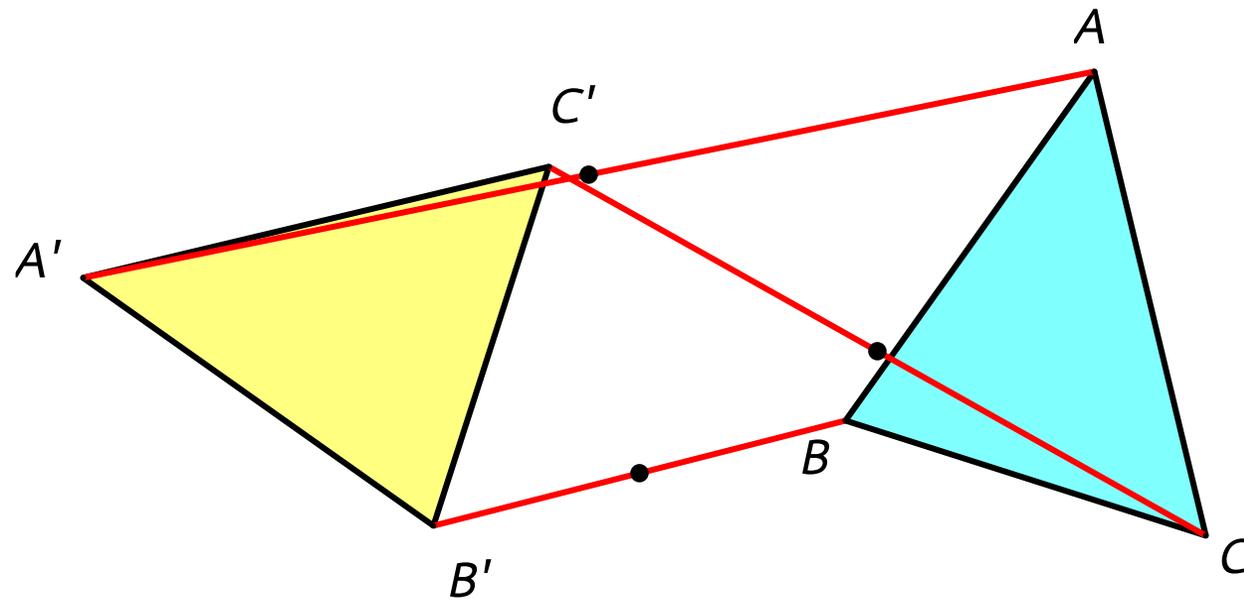
การหาจุดหมุน

ขั้นตอนที่ 1 สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกันของรูปต้นแบบ
และภาพที่ได้จากการหมุน



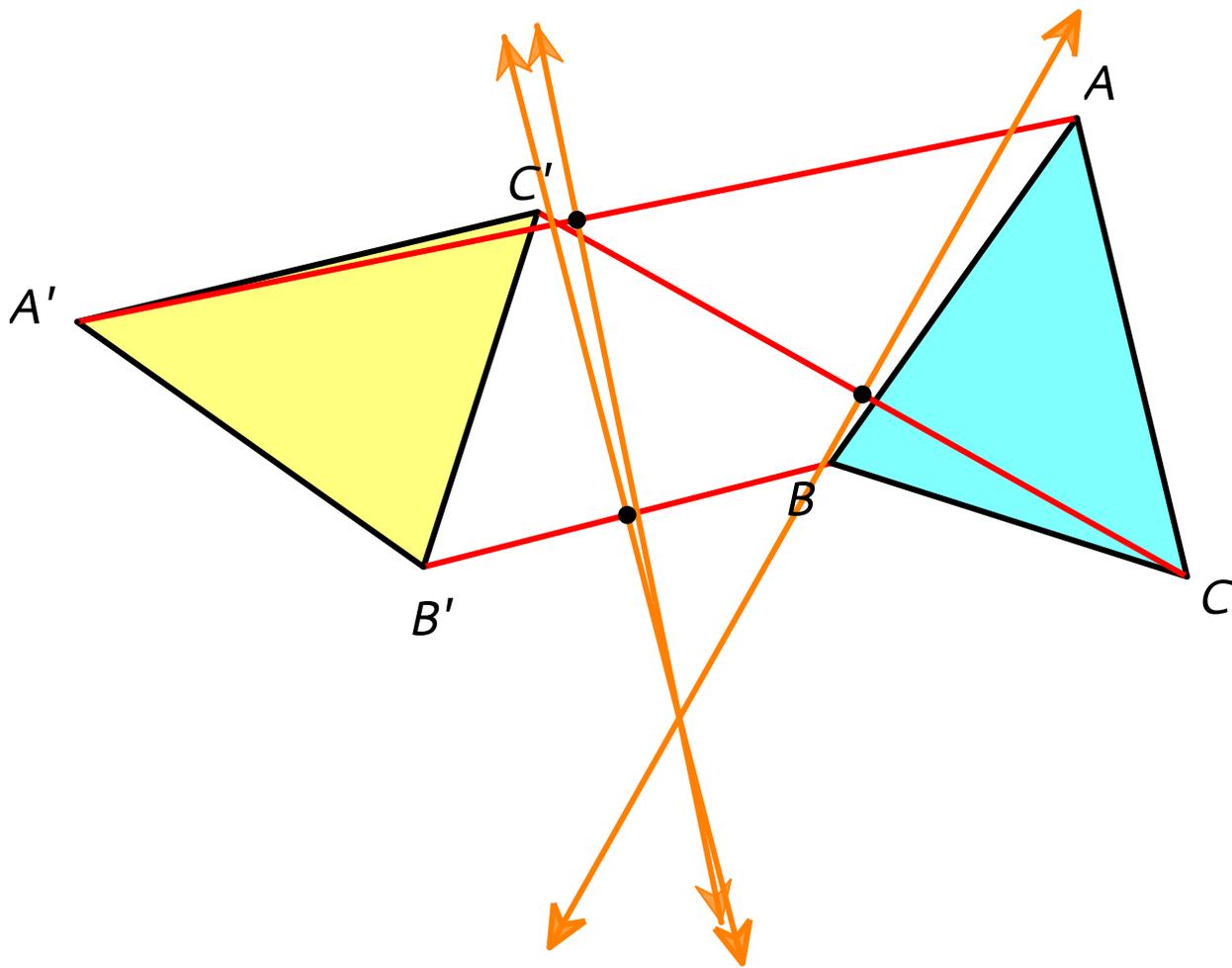
การหาจุดหมุน

ขั้นตอนที่ 2 หาจุดกึ่งกลางของเส้น

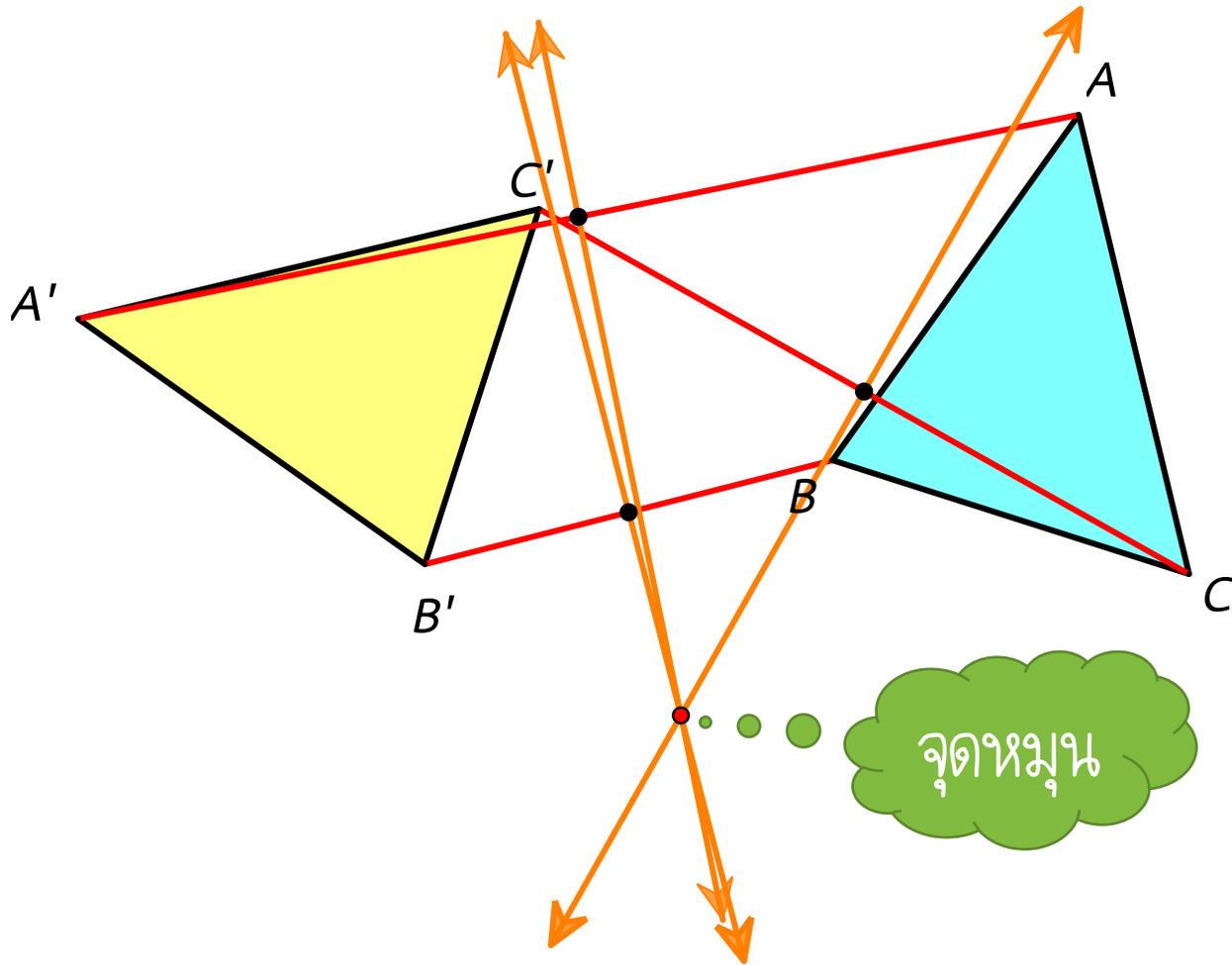


การหาจุดหมุน

ขั้นตอนที่ 3
สร้างเส้นตั้งฉาก



การหาจุดหมุน



ขั้นตอนที่ 4

จุดตัดของเส้นตั้งฉาก
จะตัดกันที่จุดเดียวกัน
นั่นคือ จุดหมุน





ให้ทำข้อที่ 2

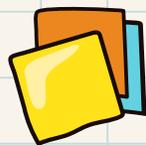


การหมุน

“ การหมุนบนระนาบเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีจุด O ที่ตรึงจุดหนึ่งเป็น **จุดหมุน** หรือ **จุดศูนย์กลางของการหมุน (center of rotation)** แต่ละจุด P บนระนาบ มีจุด P' เป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด P รอบจุด O ตามทิศทางที่กำหนดด้วยมุมที่มีขนาด k องศา โดยที่ $OP = OP'$ ”



สมบัติของการหมุน



01

รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุน สามารถทับกันได้สนิทโดยไม่ต้องพลิกรูป หรือกล่าวว่า รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนเท่ากันทุกประการ

02

จุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนจุดนั้น จะอยู่บนวงกลมเดียวกันที่มีจุดหมุน เป็นจุดศูนย์กลาง แต่วงกลมทั้งหลายเหล่านี้ไม่จำเป็นต้องมีรัศมียาวเท่ากัน

03

เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดบน รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนจุดนั้น จะผ่านจุดหมุนเสมอ



ตัวอย่างที่ 1

กำหนดจุด O เป็นจุดหมุน จงหมุนจุด P ในทิศตามเข็มนาฬิกาเป็นระยะ 70 องศา

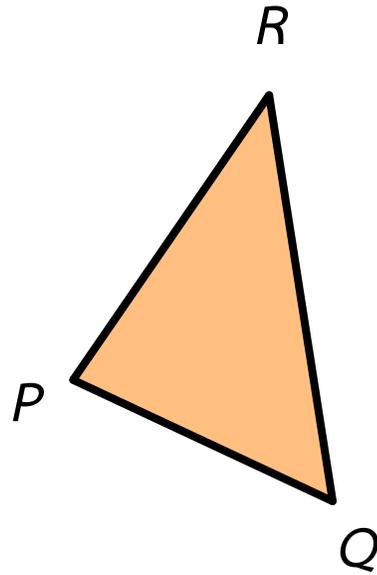
P

O



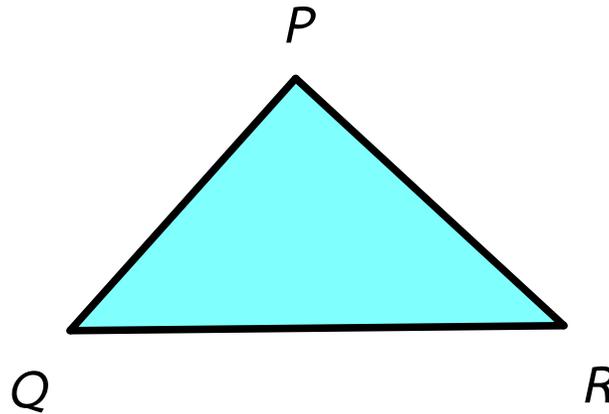
ตัวอย่างที่ 2

กำหนดจุด Q เป็นจุดหมุน จงหมุน $\triangle PQR$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาเป็นระยะ 90 องศา



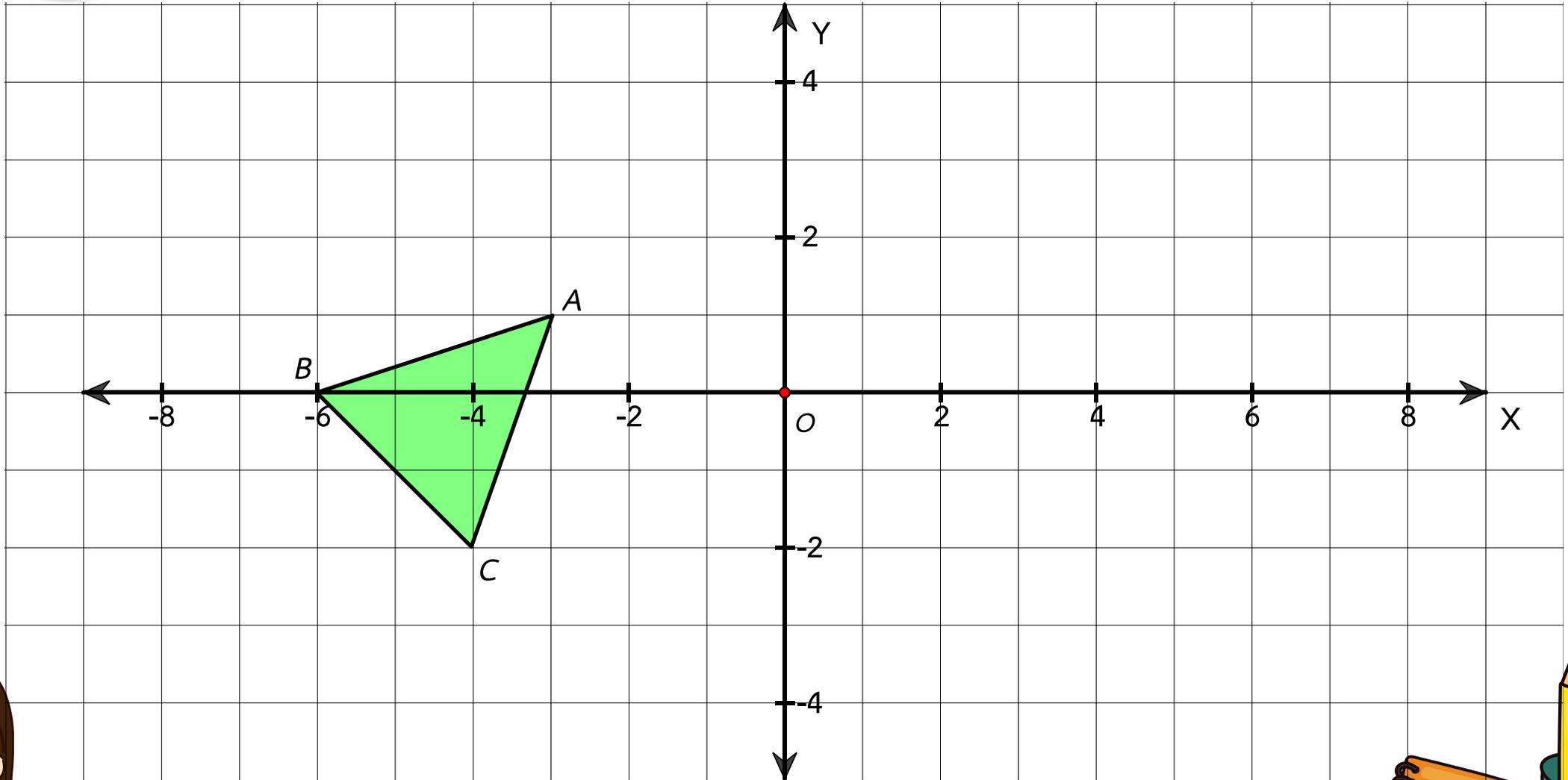
ตัวอย่างที่ 3

กำหนดจุด O เป็นจุดหมุน จงหมุน $\triangle PQR$ ในทิศทางเข็มนาฬิกาเป็นระยะ 60 องศา



ตัวอย่างที่ 4

กำหนดจุด O เป็นจุดหมุน จงหมุน $\triangle ABC$ ในทิศทางเข็มนาฬิกาเป็นระยะ 180 องศา





ให้ทำข้อที่ 3

