



เอกสารประกอบการเรียน  
วิชาคณิตศาสตร์ก้าวหน้า 1 (ค23203)  
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3



สอนโดย  
ครูทวีศักดิ์ สุทธิปัญญาปกรณ์

ชื่อ-นามสกุล..... ม.3/..... เลขที่.....

โรงเรียนสุราษฎร์พิทยา  
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานี ชุมพร

ผลการเรียนรู้

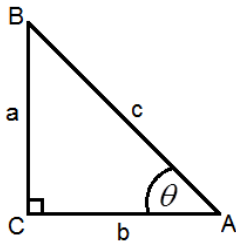
รายวิชาคณิตศาสตร์ก้าวหน้า 1 รหัสวิชา ค23203 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1

1. หาค่าของไซน์(sine), โคไซน์(cosine), แทนเจนต์(tangent), โคเซคแคนต์(cosecant), เซคแคนต์(secant), โคแทนเจนต์(cotangent) จากสามเหลี่ยมมุมฉากได้
2. นำค่าไซน์(sine), โคไซน์(cosine), แทนเจนต์(tangent), โคเซคแคนต์(cosecant), เซคแคนต์(secant), โคแทนเจนต์(cotangent) ของมุม  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  ไปประยุกต์และแก้ปัญหาได้
3. สามารถเปลี่ยนหน่วยของมุมจากองศาเป็นเรเดียน และเรเดียนเป็นองศาได้
4. หาค่าของไซน์(sine), โคไซน์(cosine), แทนเจนต์(tangent) จากวงกลม 1 หน่วยได้
5. หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่มีมุมน้อยกว่า  $0$  ได้
6. หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่มีมุมต่างๆ เป็นหน่วยองศาได้
7. หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่มีมุมต่างๆ เป็นหน่วยเรเดียนได้
8. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

รวม 8 ผลการเรียนรู้

## ตรีโกณมิติเบื้องต้น

**ตรีโกณมิติ** เป็นการศึกษารูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยหาค่าอัตราส่วนของความยาวแต่ละด้านจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนี้



- a เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุม  $\theta$
- b เรียกว่า ด้านประชิดมุม  $\theta$
- c เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก

### สัญลักษณ์แทนมุม

1.  $\theta$  อ่านว่า ทีตา หรือ เซต้า
2.  $\beta$  อ่านว่า เบต้า
3.  $\alpha$  อ่านว่า อัลฟา
4.  $\gamma$  อ่านว่า แกมมา

### ฟังก์ชันตรีโกณมิติมี ดังนี้

1. sine (ไซน์)
2. cosine (โคไซน์)
3. tangent (แทนเจนต์)
4. cosecant (โคเซคแคนต์)
5. secant (เซคแคนต์)
6. cotangent (โคแทนเจนต์)

### สูตร ตรีโกณมิติ

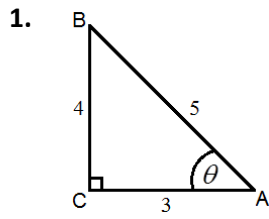
1.  $\sin \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$
2.  $\cos \theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$
3.  $\tan \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$

หมายเหตุ :  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

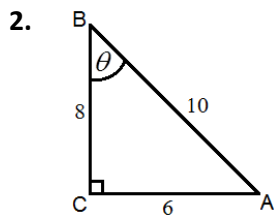
### สูตร ส่วนกลับของตรีโกณมิติ

1.  $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ข้าม}}$
2.  $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}}$
3.  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}}$

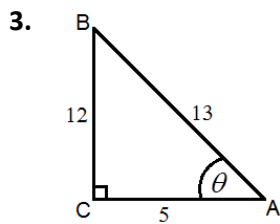
ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่างๆ จากรูปต่อไปนี้



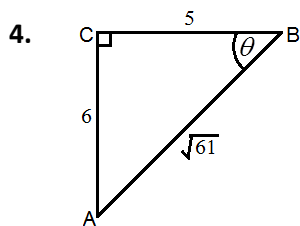
วิธีทำ  $\sin \theta = \dots\dots\dots$   $\operatorname{cosec} \theta = \dots\dots\dots$   
 $\cos \theta = \dots\dots\dots$   $\sec \theta = \dots\dots\dots$   
 $\tan \theta = \dots\dots\dots$   $\cot \theta = \dots\dots\dots$



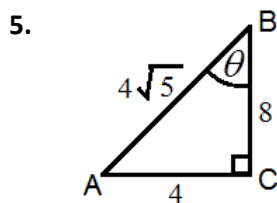
วิธีทำ  $\sin \theta = \dots\dots\dots$   $\operatorname{cosec} \theta = \dots\dots\dots$   
 $\cos \theta = \dots\dots\dots$   $\sec \theta = \dots\dots\dots$   
 $\tan \theta = \dots\dots\dots$   $\cot \theta = \dots\dots\dots$



วิธีทำ  $\sin \theta = \dots\dots\dots$   $\operatorname{cosec} \theta = \dots\dots\dots$   
 $\cos \theta = \dots\dots\dots$   $\sec \theta = \dots\dots\dots$   
 $\tan \theta = \dots\dots\dots$   $\cot \theta = \dots\dots\dots$



วิธีทำ  $\sin \theta = \dots\dots\dots$   $\operatorname{cosec} \theta = \dots\dots\dots$   
 $\cos \theta = \dots\dots\dots$   $\sec \theta = \dots\dots\dots$   
 $\tan \theta = \dots\dots\dots$   $\cot \theta = \dots\dots\dots$

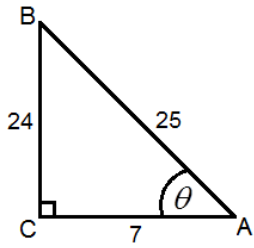


วิธีทำ  $\sin \theta = \dots\dots\dots$   $\operatorname{cosec} \theta = \dots\dots\dots$   
 $\cos \theta = \dots\dots\dots$   $\sec \theta = \dots\dots\dots$   
 $\tan \theta = \dots\dots\dots$   $\cot \theta = \dots\dots\dots$

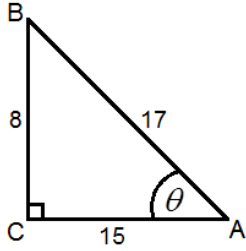
ใบงานที่ 1

จงหาค่าฟังก์ชันของ  $\sin\theta$  ,  $\cos\theta$  ,  $\tan\theta$  ,  $\operatorname{cosec}\theta$  ,  $\sec\theta$  ,  $\cot\theta$  จากรูปต่อไปนี้

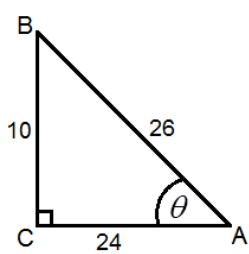
1.



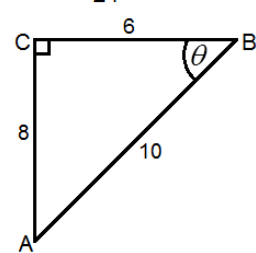
2.



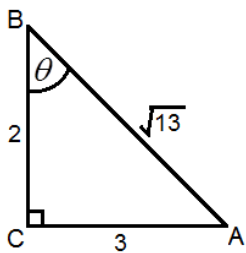
3.



4.

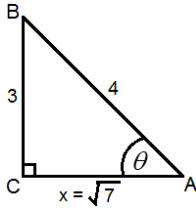


5.



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้  $\sin \theta = \frac{3}{4}$  จงหาค่าของ  $\cot^2 \theta$

วิธีทำ



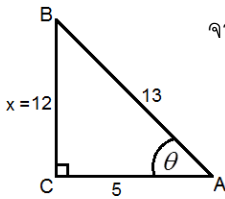
จากรูป  $x^2 = \dots\dots\dots$   
 $x^2 = \dots\dots\dots$   
 $x^2 = \dots\dots\dots$   
 $x = \dots\dots\dots$

ดังนั้น  $\cot^2 \theta = \left( - \right)^2 = \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้  $\sec \theta = \frac{13}{5}$  จงหาค่าของ  $\sin \theta + \cos \theta$

วิธีทำ



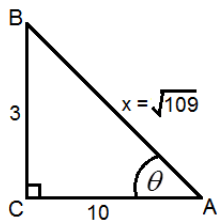
จากรูป  $x^2 = \dots\dots\dots$   
 $x^2 = \dots\dots\dots$   
 $x^2 = \dots\dots\dots$   
 $x = \dots\dots\dots$

ดังนั้น  $\sin \theta + \cos \theta = \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้  $\tan \theta = 0.3$  จงหาค่าของ  $\operatorname{cosec}^2 \theta - \cos^2 \theta$

วิธีทำ



จากรูป  $x^2 = \dots\dots\dots$   
 $x^2 = \dots\dots\dots$   
 $x^2 = \dots\dots\dots$   
 $x = \dots\dots\dots$

ดังนั้น  $\operatorname{cosec}^2 \theta - \cos^2 \theta = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

ใบงานที่ 2

จงแสดงวิธีทำแก้โจทย์ปัญหาต่อไปนี้

- กำหนดให้  $\sin \theta = \frac{5}{6}$  จงหาค่าของ  $\operatorname{cosec} \theta + \sec \theta$
- กำหนดให้  $\cos \theta = \frac{3}{5}$  จงหาค่าของ  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$
- กำหนดให้  $\operatorname{cosec} \beta = \frac{25}{7}$  จงหาค่าของ  $8\sec \beta - 14\cot \beta$
- กำหนดให้  $\sec \beta = \frac{3}{2}$  จงหาค่าของ  $\operatorname{cosec}^2 \beta - \cot^2 \beta$
- กำหนดให้  $\tan \alpha = \frac{8}{15}$  จงหาค่าของ  $\sec \alpha - \operatorname{cosec} \alpha$
- กำหนดให้  $\cot \alpha = 0.5$  จงหาค่าของ  $2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$
- กำหนดให้  $\sin \gamma = 0.12$  จงหาค่าของ  $\tan^2 \gamma \cdot \cos^2 \gamma$
- กำหนดให้  $\tan \gamma = 1.5$  จงหาค่าของ  $\sin \gamma \cdot \cos \gamma + \operatorname{cosec} \gamma \cdot \sec \gamma$
- กำหนดให้  $\sin \theta = \frac{5}{13}$  จงหาค่าของ  $12 \cos \theta \cot \theta$
- กำหนดให้  $\cos \theta = \frac{24}{25}$  จงหาค่าของ  $10\sin \theta \cos \theta$

## หน่วยของมุม

$\pi$  เรเดียน =  $180^\circ$

$\frac{\pi}{6}$  เรเดียน =  $30^\circ$

$2\pi$  เรเดียน =  $360^\circ$

$\frac{\pi}{4}$  เรเดียน =  $45^\circ$

$\frac{\pi}{2}$  เรเดียน =  $90^\circ$

$\frac{\pi}{3}$  เรเดียน =  $60^\circ$

$\frac{3\pi}{2}$  เรเดียน =  $270^\circ$

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ มุม  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ 

$\theta$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

$\operatorname{cosec} \theta$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\sec \theta$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
$\cot \theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$



ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1.  $12 \cos 45^\circ \sin 30^\circ \cot 45^\circ$

วิธีทำ  $12 \cos 45^\circ \sin 30^\circ \cot 45^\circ = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

2.  $6 \sin^2 60^\circ \sec^2 45^\circ \cos 60^\circ$

วิธีทำ  $6 \sin^2 60^\circ \sec^2 45^\circ \cos 60^\circ = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

3.  $24 \operatorname{cosec} 60^\circ (\sec 30^\circ + \cot 30^\circ)$

วิธีทำ  $24 \operatorname{cosec} 60^\circ (\sec 30^\circ + \cot 30^\circ) = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

4.  $\operatorname{cosec} 45^\circ (\sec 45^\circ + \tan 45^\circ)$

วิธีทำ  $\operatorname{cosec} 45^\circ (\sec 45^\circ + \tan 45^\circ) = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

5.  $\cot^2 60^\circ - 4 \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

วิธีทำ  $\cot^2 60^\circ - 4 \operatorname{cosec}^2 30^\circ = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

6.  $\sin^2 30^\circ + 8 \cot^2 60^\circ - \cot 45^\circ$

วิธีทำ  $\sin^2 30^\circ + 8 \cot^2 60^\circ - \cot 45^\circ = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

7.  $\cos^2 60^\circ + 24 \sin 30^\circ - 6 \cot^2 30^\circ$

วิธีทำ  $\cos^2 60^\circ + 24 \sin 30^\circ - 6 \cot^2 30^\circ = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

8.  $(\sec^2 45^\circ + 1)(\operatorname{cosec}^2 45^\circ - 1)$

วิธีทำ  $(\sec^2 45^\circ + 1)(\operatorname{cosec}^2 45^\circ + 1) = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

9.  $(\operatorname{cosec}^2 60^\circ - 1)(\tan^2 60^\circ + 1)$

วิธีทำ  $(\operatorname{cosec}^2 60^\circ - 1)(\tan^2 60^\circ + 1) = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

10.  $(\operatorname{cosec} 30^\circ + \sec 60^\circ)^2 (\cot^2 60^\circ \tan^2 30^\circ)$

วิธีทำ  $(\operatorname{cosec} 30^\circ + \sec 60^\circ)^2 (\cot^2 60^\circ \tan^2 30^\circ) = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

11.  $(\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ)(\operatorname{cosec}^2 60^\circ + \sec^2 60^\circ)$

วิธีทำ  $(\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ)(\operatorname{cosec}^2 60^\circ + \sec^2 60^\circ) = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

12.  $12 \sin^2 45^\circ \cos^2 60^\circ (\sec^2 60^\circ - 4)$

วิธีทำ  $12 \sin^2 45^\circ \cos^2 60^\circ (\sec^2 60^\circ - 4) = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

13.  $4\sqrt{3} \operatorname{cosec} 60^\circ (\sec^2 30^\circ + \cot 30^\circ)$

วิธีทำ  $4\sqrt{3} \operatorname{cosec} 60^\circ (\sec^2 30^\circ + \cot 30^\circ) = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

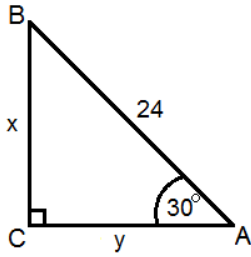
ใบงานที่ 3

จงแสดงวิธีหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1.  $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ \cot 60^\circ$
2.  $8\sin^2 30^\circ \tan 45^\circ \cos 60^\circ$
3.  $16\cos 60^\circ \tan^2 60^\circ \cos^2 45^\circ$
4.  $\tan^2 30^\circ + 5\tan 45^\circ$
5.  $\cos 60^\circ \sin 30^\circ - 4\tan 60^\circ \cos 30^\circ$
6.  $5\sin 45^\circ \sec 45^\circ + 2\operatorname{cosec} 30^\circ + \cos 60^\circ$
7.  $12\operatorname{cosec}^2 45^\circ - 6\sec^2 30^\circ$
8.  $4\sqrt{3}\operatorname{cosec} 30^\circ \cos 60^\circ$
9.  $1 + \tan^2 30^\circ$
10.  $\cos 60^\circ (\tan 60^\circ + \cot 60^\circ)$
11.  $\tan 45^\circ \cot 30^\circ - \cos^2 30^\circ$
12.  $(\sec 45^\circ - 1)(\operatorname{cosec} 45^\circ + 1)$
13.  $(\sec 60^\circ + \tan 60^\circ)(\sec 60^\circ - \tan 60^\circ)$
14.  $6\sin 30^\circ (1 + \cot^2 30^\circ)$
15.  $(\sin 30^\circ + \cos 30^\circ)^2 (\sin 30^\circ - \cos 30^\circ)^2$

การประยุกต์ใช้ตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของตัวแปรจากรูปต่อไปนี้



วิธีทำ  $\frac{x}{24} = \sin 30^\circ$

และ  $\frac{y}{24} = \cos 30^\circ$

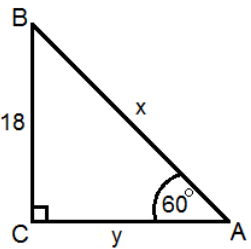
.....

.....

.....

ตอบ .....

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของตัวแปรจากรูปต่อไปนี้



วิธีทำ  $\frac{x}{18} = \csc 60^\circ$

และ  $\frac{y}{18} = \cot 60^\circ$

.....

.....

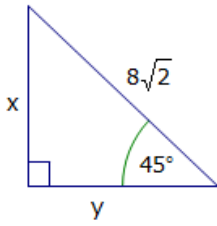
.....

ตอบ .....

ใบงานที่ 4

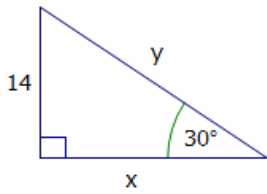
จงหาค่าของตัวแปร  $x$  และ  $y$  จากรูปต่อไปนี้

1.



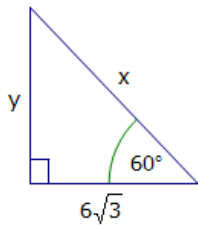
วิธีทำ.....  
.....  
.....  
.....  
.....

2.



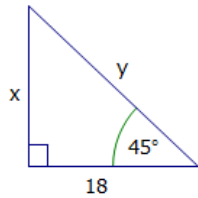
วิธีทำ.....  
.....  
.....  
.....  
.....

3.



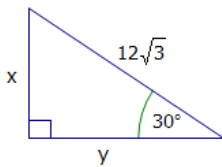
วิธีทำ.....  
.....  
.....  
.....  
.....

4.



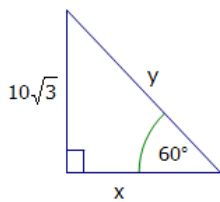
วิธีทำ.....  
.....  
.....  
.....  
.....

5.



วิธีทำ.....  
.....  
.....  
.....  
.....

6.

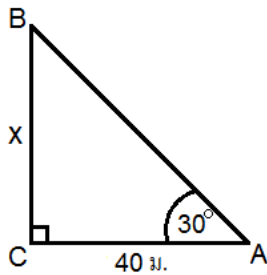


วิธีทำ.....  
.....  
.....  
.....  
.....

### โจทย์ปัญหาตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 1 ต้นไม้ต้นหนึ่งทอดเงายาว 40 เมตร แนวของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดปลายของเงาต้นไม้ และยอดต้นไม้ ทำมุม  $30^\circ$  กับเงาของต้นไม้ จงหาความสูงของต้นไม้ (กำหนดให้  $\sqrt{3} \approx 1.732$ )

วิธีทำ



$$\frac{x}{40} = \tan 30^\circ$$

.....

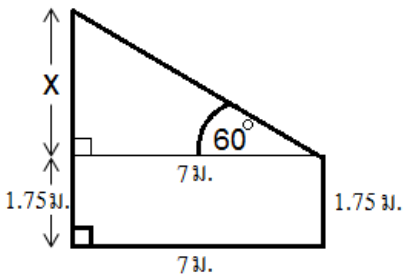
.....

.....

ตอบ ต้นไม้สูงเท่ากับ ..... เมตร

ตัวอย่างที่ 2 วินัยเห็นต้นสักต้นหนึ่ง ต้องการหาความสูงต้นสักต้นนี้จึงเดินออกห่างจากโคนต้น 7 เมตร และมองผ่านกล้องส่องทางไกลไปที่ยอดต้นสักทำมุม  $60^\circ$  กับแนวระดับสายตา ถ้าวินัยสูง 1.75 เมตร เขาจะประมาณความสูงของต้นสักได้กี่เมตร

วิธีทำ



$$\frac{x}{7} = \tan 60^\circ$$



.....

.....

.....

ดังนั้น ต้นไม้สูง = ..... + ..... = ..... เมตร

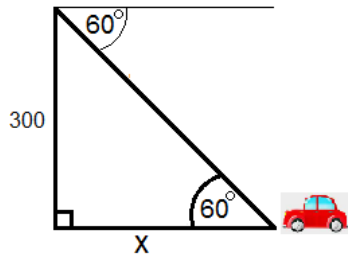
ตอบ ต้นไม้สูงเท่ากับ ..... เมตร



ตัวอย่างที่ 3 จากยอดผาของดอยเต่าสูง 300 เมตร เห็นรถยนต์จอดเป็นมุมก้ม  $60^\circ$

จงหาว่ารถคันนี้อยู่ห่างตีนผาเท่าไร

วิธีทำ



$$\frac{x}{300} = \cot 60^\circ$$

.....

.....

.....

ตอบ รถอยู่ห่างตีนผาเท่ากับ ..... เมตร

## ใบงานที่ 5

### จงแสดงวิธีทำแก้โจทย์ปัญหาต่อไปนี้ (กำหนดให้ $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732$ )

1. วินัยมองเห็นต้นสักอายุประมาณ 100 ปี ต้นหนึ่ง วินัยต้องการประมาณความสูงของต้นสักต้นนี้ เขาจึงเดินออกห่างจากโคนต้นสักประมาณ 7 เมตร และมองผ่านกล้องส่องทางไกลไปที่ยอดต้นสัก แนวสายตาที่วินัยมองเห็นยอดต้นสักทำมุมขนาดประมาณ  $60^\circ$  กับแนวระดับสายตาพอดี ถ้าวินัยสูง 1.75 เมตร เขาจะประมาณความสูงของต้นสักได้กี่เมตร
2. ต้นไม้ต้นหนึ่งทอดเงายาว 40 เมตร แนวของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดปลายของเงาต้นไม้และยอดต้นไม้ทำมุมขนาดประมาณ  $30^\circ$  กับเงาของต้นไม้ จงหาความสูงของต้นไม้
3. พาดบันไดไว้กับกำแพงโดยให้ปลายบันไดตอบนจุดขอบกำแพงพอดี ถ้าบันไดยาว 7 เมตร และโคนบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 3.5 เมตร จงหาว่าบันไดทำมุมกับพื้นดินกี่องศา และกำแพงนี้สูงประมาณเท่าใด
4. จาริกอยู่บนหน้าผาสูงชันแห่งหนึ่ง ซึ่งสูงจากระดับน้ำทะเลข้างล่าง 42 เมตร เมื่อเขาทอดสายตาไปยังเรือลำหนึ่งกลางทะเลมุมที่แนวสายตาทำกับเส้นระดับมีขนาดประมาณ  $30^\circ$  เรือลำนี้อยู่ห่างฝั่งกี่เมตร
5. ชายคนหนึ่งต้องการวัดส่วนกว้างของแม่น้ำ เขายืนอยู่ริมฝั่งที่จุด A แล้วมองข้ามไปที่จุด B ซึ่งอยู่ตรงข้ามซึ่งเป็นระยะที่สั้นที่สุดแล้วเขาเดินเลียบบริเวณฝั่งแม่น้ำไปเป็นระยะทาง 100 ม. ก็หยุดอยู่ที่จุด C วัดมุม ABC ได้  $45^\circ$  จงหาความกว้างของแม่น้ำ
6. ก. ยืนอยู่บนดาดฟ้าตึกแห่งหนึ่ง มองเห็นรถยนต์คันหนึ่งจอดอยู่ริมถนนในแนวเดียวกับตึก และอยู่ห่างจากตึก 100 ม. เป็นมุมก้ม  $30^\circ$  จงหาความสูงของตึกหลังนี้
7. ปล่องไฟปล่องหนึ่งสูงกว่าอีกปล่องหนึ่ง 30 ฟุต ก. ยืนห่างจากปล่องเตี้ย 100 ฟุต สังเกตเห็นว่าเส้นตรงเชื่อมระหว่างยอดปล่องไฟทั้ง 2 เอียงเป็นมุม  $60^\circ$  กับพื้นราบ จงหาความสูงของปล่องไฟทั้งสอง
8. ปีเตอร์ยืนห่างจากเสาธง 100 ม. เขาเห็นเครื่องบินลำหนึ่งบินอยู่เหนือเสาธงพอดี และทำมุมเงย  $60^\circ$  กับเครื่องบิน จงหาว่าเครื่องบินอยู่สูงจากพื้นดินกี่เมตร
9. จากยอดผาของดอยเต่า ซึ่งสูง 300 ม. มองเห็นรถยนต์จอดอยู่เป็นมุมก้ม  $60^\circ$  รถคันนั้นอยู่ห่างจากตีนผาดอยเท่าไร
10. ต้นไม้ต้นหนึ่งทอดเงายาว 12 ม. แนวของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดปลายของเงาต้นไม้และยอดต้นไม้ทำมุม  $30^\circ$  กับเงาของต้นไม้ จงหาความสูงของต้นไม้
11. ณ จุดบนพื้นดินมุมยกขึ้นของเสาธงเท่ากับ  $30^\circ$  เมื่อเดินตรงเข้าไปใกล้เสาธงนั้นอีก 10 ม. มุมยกขึ้นของเสาธงนั้นเท่ากับ  $45^\circ$  จงหาความสูงของเสาธงนั้น
12. เสาธงชาติปักอยู่บนอาคารเรียน วินัยนั่งอยู่ในสนามห่างจากอาคารเรียน  $10\sqrt{3}$  ฟุต มองเห็นยอดอาคารและเสาธงเป็นมุมเงย  $30^\circ$  และ  $60^\circ$  ตามลำดับ จงหาความสูงของเสาธง
13. จากยอดผาซึ่งสูง 300 ฟุต จากระดับน้ำทะเล สังเกตเห็นเรือใบ 2 ลำ อยู่ในระนาบเดียวกับเชิงผานั้น มีมุมก้มเป็น  $30^\circ$  และ  $60^\circ$  ตามลำดับ จงหาระยะระหว่างเรือใบทั้ง 2 ลำนี้
14. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนยอดหน้าผาซึ่งสูง 300 ฟุต สังเกตเห็นหอคอยแห่งหนึ่ง ซึ่งตั้งอยู่ระดับเดียวกับเชิงผาที่ชายคนนั้นยืนอยู่ปรากฏว่า มุมก้มของยอดหอคอย และเชิงหอคอยเป็น  $30^\circ$  และ  $60^\circ$  ตามลำดับ จงหาความสูงของหอคอย
15. ปล่องไฟปล่องหนึ่งสูงกว่าอีกปล่องหนึ่ง 15 ฟุต ชายคนหนึ่งยืนอยู่ห่างจากปล่องไฟปล่องเตี้ย 50 ฟุต สังเกตเห็นว่าเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างยอดปล่องไฟทั้งสองเอียงทำมุม  $27^\circ$  กับพื้นราบ จงหาความสูงของปล่องไฟทั้งสอง (กำหนด  $\tan 27^\circ = 0.51$ )

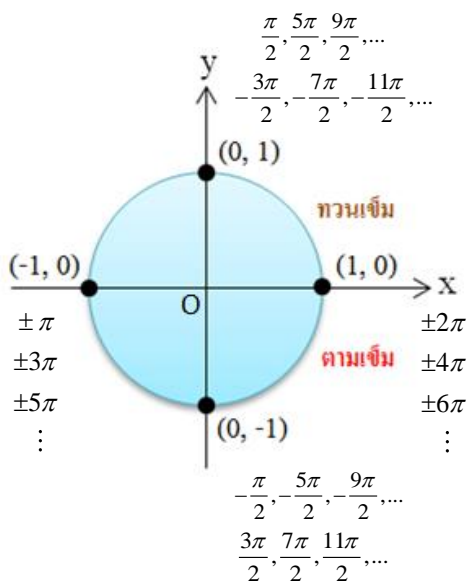
## วงกลม 1 หน่วย

การหาฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์จากวงกลม 1 หน่วย

ให้พิจารณาจากวงกลม 1 หน่วย ( $\theta$  เป็นสมาชิกของจำนวนจริง) เมื่อ

1. ถ้า  $\theta \geq 0$  แล้ว วัดระยะทาง **ทวนเข็มนาฬิกา**
2. ถ้า  $\theta < 0$  แล้ว วัดระยะทาง **ตามเข็มนาฬิกา**

♥ เริ่มวัดระยะทางจากจุด  $(1, 0)$  เสมอ

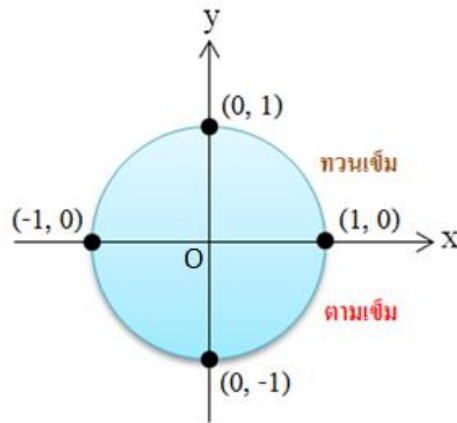


ข้อควรจำ

$$(\cos\theta, \sin\theta) = (x, y)$$

เมื่อ  $-1 \leq \cos\theta \leq 1$  และ  $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

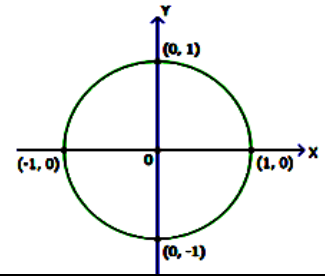
ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณต่อไปนี้ จากวงกลม 1 หน่วย



1. $\sin 6\pi = \dots\dots\dots$	$\cos 6\pi = \dots\dots\dots$	$\tan 6\pi = \dots\dots\dots$
2. $\sin 11\pi = \dots\dots\dots$	$\cos 11\pi = \dots\dots\dots$	$\tan 11\pi = \dots\dots\dots$
3. $\sin 0 = \dots\dots\dots$	$\cos 0 = \dots\dots\dots$	$\tan 0 = \dots\dots\dots$
4. $\sin 21\pi = \dots\dots\dots$	$\cos 21\pi = \dots\dots\dots$	$\tan 21\pi = \dots\dots\dots$
5. $\sin(-\pi) = \dots\dots\dots$	$\cos(-\pi) = \dots\dots\dots$	$\tan(-\pi) = \dots\dots\dots$
6. $\sin(-8\pi) = \dots\dots\dots$	$\cos(-8\pi) = \dots\dots\dots$	$\tan(-8\pi) = \dots\dots\dots$
7. $\sin \frac{\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\cos \frac{\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\tan \frac{\pi}{2} = \dots\dots\dots$
8. $\sin \frac{7\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\cos \frac{7\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\tan \frac{7\pi}{2} = \dots\dots\dots$
9. $\sin \frac{15\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\cos \frac{15\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\tan \frac{15\pi}{2} = \dots\dots\dots$
10. $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\tan\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$
11. $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\tan\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$
12. $\sin\left(-\frac{11\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\cos\left(-\frac{11\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\tan\left(-\frac{11\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$

ใบงานที่ 6

จงใช้วงกลม 1 หน่วย หาค่าฟังก์ชันตรีโกณต่อไปนี้



1.	$\sin 12\pi = \dots\dots\dots$	$\cos 12\pi = \dots\dots\dots$	$\tan 12\pi = \dots\dots\dots$
2.	$\sin 9\pi = \dots\dots\dots$	$\cos 9\pi = \dots\dots\dots$	$\tan 9\pi = \dots\dots\dots$
3.	$\sin 7\pi = \dots\dots\dots$	$\cos 7\pi = \dots\dots\dots$	$\tan 7\pi = \dots\dots\dots$
4.	$\sin 16\pi = \dots\dots\dots$	$\cos 16\pi = \dots\dots\dots$	$\tan 16\pi = \dots\dots\dots$
5.	$\sin 30\pi = \dots\dots\dots$	$\cos 30\pi = \dots\dots\dots$	$\tan 30\pi = \dots\dots\dots$
6.	$\sin(-15\pi) = \dots\dots\dots$	$\cos(-15\pi) = \dots\dots\dots$	$\tan(-15\pi) = \dots\dots\dots$
7.	$\sin(-42\pi) = \dots\dots\dots$	$\cos(-42\pi) = \dots\dots\dots$	$\tan(-42\pi) = \dots\dots\dots$
8.	$\sin(-51\pi) = \dots\dots\dots$	$\cos(-51\pi) = \dots\dots\dots$	$\tan(-51\pi) = \dots\dots\dots$
9.	$\sin(-24\pi) = \dots\dots\dots$	$\cos(-24\pi) = \dots\dots\dots$	$\tan(-24\pi) = \dots\dots\dots$
10.	$\sin(-67\pi) = \dots\dots\dots$	$\cos(-67\pi) = \dots\dots\dots$	$\tan(-67\pi) = \dots\dots\dots$
11.	$\sin \frac{3\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\cos \frac{3\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\tan \frac{3\pi}{2} = \dots\dots\dots$
12.	$\sin \frac{5\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\cos \frac{5\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\tan \frac{5\pi}{2} = \dots\dots\dots$
13.	$\sin \frac{11\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\cos \frac{11\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\tan \frac{11\pi}{2} = \dots\dots\dots$
14.	$\sin \frac{17\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\cos \frac{17\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\tan \frac{17\pi}{2} = \dots\dots\dots$
15.	$\sin \frac{23\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\cos \frac{23\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\tan \frac{23\pi}{2} = \dots\dots\dots$
16.	$\sin \frac{35\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\cos \frac{35\pi}{2} = \dots\dots\dots$	$\tan \frac{35\pi}{2} = \dots\dots\dots$
17.	$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\tan\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$
18.	$\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\tan\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$
19.	$\sin\left(-\frac{13\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\cos\left(-\frac{13\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\tan\left(-\frac{13\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$
20.	$\sin\left(-\frac{17\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\cos\left(-\frac{17\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\tan\left(-\frac{17\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$
21.	$\sin\left(-\frac{29\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\cos\left(-\frac{29\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\tan\left(-\frac{29\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$
22.	$\sin\left(-\frac{41\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\cos\left(-\frac{41\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\tan\left(-\frac{41\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$
23.	$\sin\left(-\frac{63\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\cos\left(-\frac{63\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\tan\left(-\frac{63\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$
24.	$\sin\left(-\frac{75\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\cos\left(-\frac{75\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$	$\tan\left(-\frac{75\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$

ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่มีมุมน้อยกว่า 0 (เมื่อ  $\theta > 0$ )

1. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$	4. $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$
2. $\cos(-\theta) = \cos\theta$	5. $\sec(-\theta) = \sec\theta$
3. $\tan(-\theta) = -\tan\theta$	6. $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าตรีโกณมิติจากใจหยังต่อไปนี้

1.  $\sin(-30^\circ) = \dots\dots\dots$

2.  $\cos(-45^\circ) = \dots\dots\dots$

3.  $\tan(-60^\circ) = \dots\dots\dots$

4.  $\operatorname{cosec}(-30^\circ) = \dots\dots\dots$

5.  $\sec(-45^\circ) = \dots\dots\dots$

6.  $\cot(-60^\circ) = \dots\dots\dots$

ใบงานที่ 7

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณต่อไปนี้

1.  $\sin(-30^\circ)$  =.....=.....
2.  $\sin(-45^\circ)$  =.....=.....
3.  $\sin(-60^\circ)$  =.....=.....
4.  $\cos(-30^\circ)$  =.....=.....
5.  $\cos(-45^\circ)$  =.....=.....
6.  $\cos(-60^\circ)$  =.....=.....
7.  $\tan(-30^\circ)$  =.....=.....
8.  $\tan(-45^\circ)$  =.....=.....
9.  $\tan(-60^\circ)$  =.....=.....
10.  $\operatorname{cosec}(-30^\circ)$  =.....=.....
11.  $\sec(-45^\circ)$  =.....=.....
12.  $\cot(-60^\circ)$  =.....=.....
13.  $\operatorname{cosec}(-45^\circ)$  =.....=.....
14.  $\sec(-60^\circ)$  =.....=.....
15.  $\cot(-30^\circ)$  =.....=.....
16.  $\operatorname{cosec}(-60^\circ)$  =.....=.....
17.  $\sec(-30^\circ)$  =.....=.....
18.  $\cot(-45^\circ)$  =.....=.....
19.  $-\sin(-30^\circ)$  =.....=.....
20.  $-\cos(-30^\circ)$  =.....=.....
21.  $-\tan(-30^\circ)$  =.....=.....
22.  $-\operatorname{cosec}(-60^\circ)$  =.....=.....
23.  $-\sec(-30^\circ)$  =.....=.....
24.  $-\cot(-45^\circ)$  =.....=.....

การนำไปประยุกต์ใช้

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าตรีโกณมิติจากโจทย์ต่อไปนี้

1.  $4 \sin \frac{3\pi}{2} \cos 0 \sin 5\pi$

วิธีทำ  $4 \sin \frac{3\pi}{2} \cos 0 \sin 5\pi = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

2.  $\frac{3}{4} \cos 6\pi \cos(-5\pi) \cos(-10\pi)$

วิธีทำ  $\frac{3}{4} \cos 6\pi \cos(-5\pi) \cos(-10\pi) = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

3.  $\frac{1}{2} \sin \frac{17\pi}{2} \sin \frac{13\pi}{2}$

วิธีทำ  $\frac{1}{2} \sin \frac{17\pi}{2} \sin \frac{13\pi}{2} = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$

4.  $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{17\pi}{2}\right) \cos \frac{9\pi}{2}$

วิธีทำ  $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{17\pi}{2}\right) \cos \frac{9\pi}{2} = \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

ตอบ  $\dots\dots\dots$



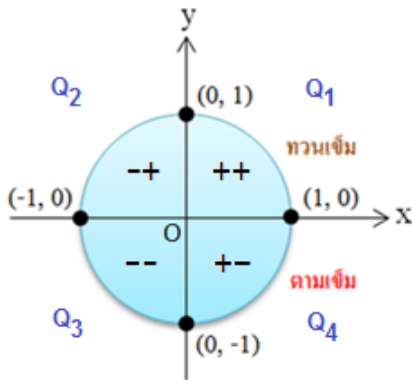
การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติเมื่อ  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

1. $\sin(\pi \pm \theta) = \pm \sin \theta$	4. $\operatorname{cosec}(\pi \pm \theta) = \pm \operatorname{cosec} \theta$
2. $\cos(\pi \pm \theta) = \pm \cos \theta$	5. $\sec(\pi \pm \theta) = \pm \sec \theta$
3. $\tan(\pi \pm \theta) = \pm \tan \theta$	6. $\cot(\pi \pm \theta) = \pm \cot \theta$

♣ ค่าของฟังก์ชันจะเป็น + หรือ - ให้สังเกตจุดปลาย ส่วนโค้งว่าอยู่ในควอดรันต์(Q) ไค

♠  $\tan \theta$  เป็น + เมื่อจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน  $Q_1, Q_3$

♠  $\tan \theta$  เป็น - เมื่อจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน  $Q_2, Q_4$



จากสูตร

$$(\cos \theta, \sin \theta) = (x, y)$$

และ

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

สรุปได้ว่า

1.  $\sin$  เป็น  $\oplus$  จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ใน  $Q_1, Q_2$

$\sin$  เป็น  $\ominus$  จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ใน  $Q_3, Q_4$

2.  $\cos$  เป็น  $\oplus$  จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ใน  $Q_1, Q_4$

$\cos$  เป็น  $\ominus$  จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ใน  $Q_2, Q_3$

3.  $\tan$  เป็น  $\oplus$  จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ใน  $Q_1, Q_3$

$\tan$  เป็น  $\ominus$  จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ใน  $Q_2, Q_4$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าตรีโกณมิติจากโจทย์ต่อไปนี้

1.  $\sin \frac{2\pi}{3} = \dots\dots\dots$

2.  $\sin \frac{4\pi}{3} = \dots\dots\dots$

3.  $\sin \frac{9\pi}{4} = \dots\dots\dots$

4.  $\sin \frac{7\pi}{4} = \dots\dots\dots$

5.  $\cos \frac{43\pi}{6} = \dots\dots\dots$

6.  $\cos \frac{23\pi}{4} = \dots\dots\dots$

7.  $\tan \frac{26\pi}{3} = \dots\dots\dots$

8.  $\tan \frac{127\pi}{3} = \dots\dots\dots$

9.  $\operatorname{cosec} \frac{35\pi}{6} = \dots\dots\dots$

10.  $\sec \frac{19\pi}{3} = \dots\dots\dots$

11.  $\cot \frac{29\pi}{6} = \dots\dots\dots$

12.  $\sin \frac{111\pi}{3} = \dots\dots\dots$

ใบงานที่ 8

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณต่อไปนี้

1.  $\sin \frac{2\pi}{3}$  =..... =..... =.....
2.  $\cos \frac{4\pi}{3}$  =..... =..... =.....
3.  $\tan \frac{5\pi}{6}$  =..... =..... =.....
4.  $\sin \frac{7\pi}{6}$  =..... =..... =.....
5.  $\cos \frac{3\pi}{4}$  =..... =..... =.....
6.  $\tan \frac{5\pi}{4}$  =..... =..... =.....
7.  $\sin \frac{5\pi}{3}$  =..... =..... =.....
8.  $\cos \frac{7\pi}{4}$  =..... =..... =.....
9.  $\tan \frac{9\pi}{4}$  =..... =..... =.....
10.  $\sin \frac{11\pi}{3}$  =..... =..... =.....
11.  $\cos \frac{25\pi}{4}$  =..... =..... =.....
12.  $\tan \frac{31\pi}{6}$  =..... =..... =.....
13.  $\sin \frac{5\pi}{6}$  =..... =..... =.....
14.  $\cos \frac{7\pi}{3}$  =..... =..... =.....
15.  $\tan \frac{9\pi}{4}$  =..... =..... =.....
16.  $\csc \frac{5\pi}{4}$  =..... =..... =.....
17.  $\sec \frac{23\pi}{4}$  =..... =..... =.....
18.  $\cot \frac{37\pi}{6}$  =..... =..... =.....
19.  $\csc \frac{13\pi}{6}$  =..... =..... =.....
20.  $\sec \frac{115\pi}{4}$  =..... =..... =.....
21.  $\cot \frac{59\pi}{6}$  =..... =..... =.....

ใบงานที่ 9

จงแสดงวิธีทำ หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณต่อไปนี้

1.  $\sin \frac{\pi}{2} \cos 12\pi \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{2}$

2.  $4 \cos 9\pi \sin \frac{7\pi}{2} \sec 5\pi$

3.  $-12 \sec(-4\pi) \cos 3\pi \sin \frac{13\pi}{2}$

4.  $8 \sin(-\frac{13\pi}{2}) \cos(-8\pi) \tan \frac{27\pi}{2}$

5.  $6 \cos 0 \sin \frac{51\pi}{2} \cos(-8\pi) \tan \frac{25\pi}{4}$

6.  $\sin \frac{11\pi}{3} \cos \frac{11\pi}{3} + \sin \frac{19\pi}{6} \cos \frac{19\pi}{6}$

7.  $\sin \frac{19\pi}{4} \cos \frac{19\pi}{4} - \sin \frac{7\pi}{6} \cos \frac{7\pi}{6}$

8.  $6 \sin^2 \frac{7\pi}{3} - 2 \cos^2 \frac{43\pi}{6}$

9.  $-12 \operatorname{cosec}^2 \frac{27\pi}{4} - 4 \sec^2 \frac{100\pi}{3}$

10.  $18 \sin^2 \frac{22\pi}{3} - 2 \cos^2 \frac{47\pi}{6} + 9 \sin 20\pi - 4 \tan \frac{47\pi}{4}$

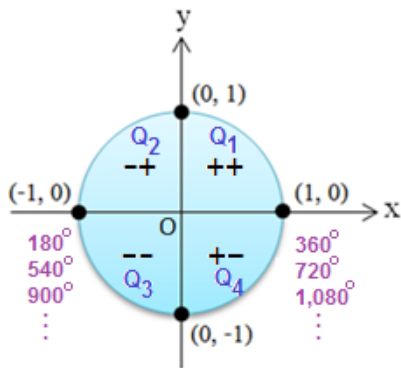
การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติเมื่อ  $0^\circ < \theta < 90^\circ$

1. $\sin(180^\circ \pm \theta) = \pm \sin \theta$	4. $\operatorname{cosec}(180^\circ \pm \theta) = \pm \operatorname{cosec} \theta$
2. $\cos(180^\circ \pm \theta) = \pm \cos \theta$	5. $\sec(180^\circ \pm \theta) = \pm \sec \theta$
3. $\tan(180^\circ \pm \theta) = \pm \tan \theta$	6. $\cot(180^\circ \pm \theta) = \pm \cot \theta$

♣ ค่าของฟังก์ชันจะเป็น + หรือ - ให้สังเกตจุดปลาย ส่วนโค้งว่าอยู่ในควอดรันต์(Q) ไค

♠  $\tan \theta$  เป็น + เมื่อจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน  $Q_1, Q_3$

♠  $\tan \theta$  เป็น - เมื่อจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน  $Q_2, Q_4$



ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าตรีโกณมิติจากโจทย์ต่อไปนี้

1.  $\sin 120^\circ = \dots\dots\dots$
2.  $\cos 150^\circ = \dots\dots\dots$
3.  $\tan 135^\circ = \dots\dots\dots$
4.  $\sin 210^\circ = \dots\dots\dots$
5.  $\cos 240^\circ = \dots\dots\dots$
6.  $\tan 225^\circ = \dots\dots\dots$
7.  $\operatorname{cosec} 300^\circ = \dots\dots\dots$
8.  $\sec 390^\circ = \dots\dots\dots$

ใบงานที่ 10

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณต่อไปนี้

1.  $\sin 120^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

2.  $\cos 135^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

3.  $\tan 150^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

4.  $\sin 240^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

5.  $\cos 210^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

6.  $\tan 225^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

7.  $\sin 300^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

8.  $\cos 330^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

9.  $\tan 315^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

10.  $\sin 390^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

11.  $\cos 420^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

12.  $\tan 405^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

13.  $\sin 780^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

14.  $\cos 1125^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

15.  $\tan 495^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

16.  $\csc 135^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

17.  $\sec 240^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

18.  $\cot 210^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

19.  $\csc 120^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

20.  $\sec 150^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

21.  $\cot 120^\circ = \dots = \dots = \dots$

22.  $\csc 390^\circ = \dots = \dots = \dots$

23.  $\sec 330^\circ = \dots = \dots = \dots$

24.  $\cot 225^\circ = \dots = \dots = \dots$

25.  $-\cos 120^\circ = \dots = \dots = \dots$

26.  $-\sin 135^\circ = \dots = \dots = \dots$

27.  $-\tan 150^\circ = \dots = \dots = \dots$

28.  $-\csc 420^\circ = \dots = \dots = \dots$

29.  $-\sec 240^\circ = \dots = \dots = \dots$

30.  $-\cot 210^\circ = \dots = \dots = \dots$

ใบงานที่ 11

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณต่อไปนี้

1.  $2 \sin^2 30^\circ - 4 \cos^2 60^\circ$
  2.  $3 \tan^2 45^\circ + 5 \cos^2 30^\circ - 9 \tan^2 60^\circ$
  3.  $8 \tan^2 150^\circ + 12 \cos 150^\circ \sin 210^\circ - 2 \sin 300^\circ$
  4.  $6 \sin 240^\circ - 14 \cos 120^\circ$
  5.  $5 \cos 300^\circ - \sin 450^\circ + \sec 495^\circ$
  6.  $\frac{4 \cos(-330^\circ) + 2 \tan(-405^\circ)}{\cot(-225^\circ)}$
  7.  $10 \cos 135^\circ \sin 225^\circ - \cot^2 150^\circ$
  8.  $\cot^2 150^\circ \cot^2 315^\circ \cot^2 420^\circ$
  9.  $\frac{9}{4} \sec^2 120^\circ - 3 \operatorname{cosec}^2 90^\circ - 12 \cot^2 30^\circ$
  10.  $\sec 6\pi \operatorname{cosec} \frac{25\pi}{6} \cot \frac{32\pi}{3}$
  11.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \left[ \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \right]$
  12.  $\operatorname{cosec} \frac{29\pi}{4} \cot\left(\frac{3\pi}{4} - \pi\right)$
  13.  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$
  14.  $6 \tan^2\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cot^2\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$
- $$12 \sec^2\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cot^2\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \tan^2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$



ใบงานที่ 12

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณต่อไปนี้

1.  $\cos 0 \cos \pi \cos 2\pi \cos 5\pi$

2.  $\cos^2 \pi \cos 0 - 3 \sin^2 \frac{3\pi}{2} \cos(-\pi) + \sin \frac{\pi}{2} \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

3.  $\sin \pi \cos \frac{3\pi}{2} + \sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2}$

4.  $\cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3}$

5.  $\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$

6.  $\cos^2 \frac{3\pi}{2} \sin \pi + 2 \cos \frac{\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

7.  $\sin \frac{\pi}{6} + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

8.  $3 \cos^2 \frac{\pi}{4} + 3 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

9.  $\sin \frac{\pi}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cos^2 \frac{\pi}{4} + 3 \sin^2 \frac{\pi}{4} \cos \pi$

10.  $\sin \frac{5\pi}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cos^2 \frac{3\pi}{4} + 6 \sin^2 \frac{5\pi}{4} \cos(-3\pi)$

11.  $\sin \frac{\pi}{3} \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

12.  $\sin \frac{5\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{4} - \sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \cos \frac{11\pi}{6}$

13.  $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$

14.  $\sin^2\left(-\frac{11\pi}{6}\right) + \cos^2\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

15.  $\sin \frac{8\pi}{3} + \cos \frac{43\pi}{6} - \sin\left(-\frac{47\pi}{4}\right)$