

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

แคลคูลัสเบื้องต้น

ม. 6



เนื้อหาหลัก

- ❖ ลิมิตของฟังก์ชัน
- ❖ การหาลิมิตจากกราฟ
- ❖ ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิต
- ❖ ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- ❖ อัตราการเปลี่ยนแปลง
- ❖ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- ❖ ความชันของเส้นโค้ง
- ❖ การหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่
- ❖ อนุพันธ์อันดับสูง
- ❖ การหาอนุพันธ์โดยปริยาย
- ❖ ค่าต่ำสุด-สูงสุดของฟังก์ชัน
- ❖ การประยุกต์อนุพันธ์
- ❖ ปริยานุพันธ์
- ❖ ปริพันธ์จำกัดเขต
- ❖ พื้นที่ใต้เส้นโค้ง

ระดับความเข้มข้น

✓ ง่าย ✓ ปานกลาง ✓ ยาก

เฉลย

เสถียร วิเชียรสาร

วท.บ. (สถิติ)

ป.บัณฑิต (การศึกษ)

ครู คศ. 1

โรงเรียนบึงมะลูวิทยา

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=x+3$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 2 โดยเติมค่า $f(x)$ ลงในตาราง

$x < 2$		$x > 2$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.5		2.5	
1.9		2.1	
1.95		2.05	
1.99		2.01	
1.995		2.005	
1.999		2.001	

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots\dots\dots$$

2. จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=2x-1$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 3 โดยเติมค่า $f(x)$ ลงในตาราง

$x < 3$		$x > 3$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.5		3.5	
2.9		3.1	
2.95		3.05	
2.99		3.01	
2.995		3.005	
2.999		3.001	

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \dots\dots\dots$$

3. จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=3x$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 0 โดยเติมค่า $f(x)$ ลงในตาราง

$x < 0$		$x > 0$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
-1		1	
-0.5		0.5	
-0.1		0.1	
-0.01		0.01	
-0.001		0.001	
-0.0001		0.0001	

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots\dots\dots$$

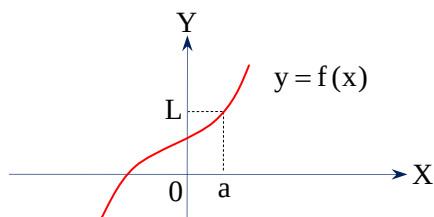
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots\dots\dots$$

แบบฝึกหัดที่ 2

จากกราฟในแต่ละข้อ จงหาค่าต่าง ๆ ตามที่กำหนด

1.



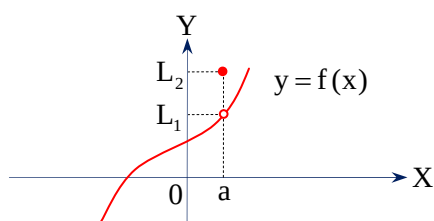
1.1 $f(a) = \dots\dots\dots$

1.2 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \dots\dots\dots$

1.3 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \dots\dots\dots$

1.4 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots\dots\dots$

2.



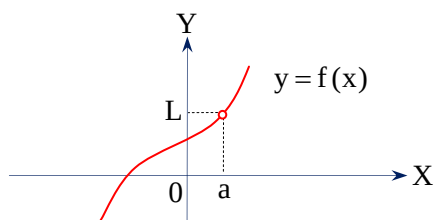
2.1 $f(a) = \dots\dots\dots$

2.2 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \dots\dots\dots$

2.3 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \dots\dots\dots$

2.4 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots\dots\dots$

3.



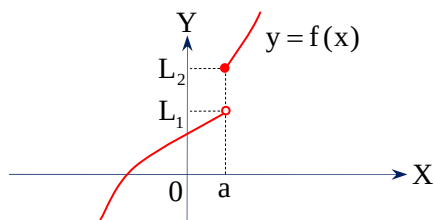
3.1 $f(a) = \dots\dots\dots$

3.2 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \dots\dots\dots$

3.3 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \dots\dots\dots$

3.4 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots\dots\dots$

4.



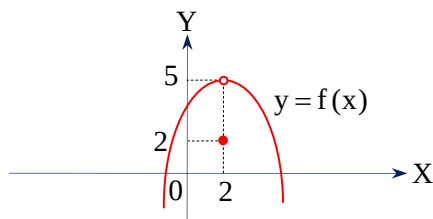
4.1 $f(a) = \dots\dots\dots$

4.2 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \dots\dots\dots$

4.3 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \dots\dots\dots$

4.4 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots\dots\dots$

5.



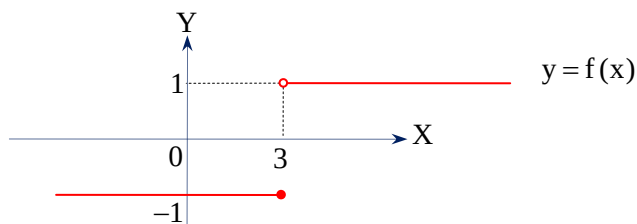
5.1 $f(2) = \dots\dots\dots$

5.2 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots\dots\dots$

5.3 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$

5.4 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots\dots\dots$

6.



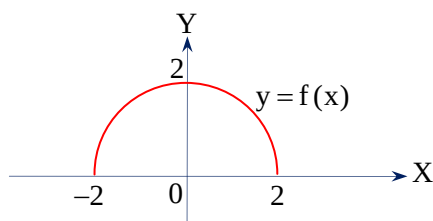
6.1 $f(3) = \dots\dots\dots$

6.2 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \dots\dots\dots$

6.3 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \dots\dots\dots$

6.4 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \dots\dots\dots$

7.



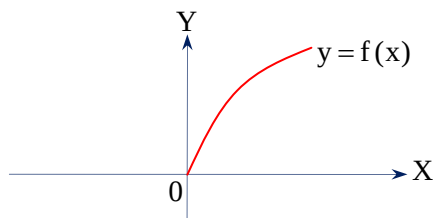
7.1 $f(0) = \dots\dots\dots$

7.2 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots\dots\dots$

7.3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots\dots\dots$

7.4 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots\dots\dots$

8.



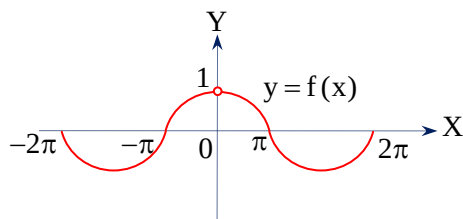
8.1 $f(0) = \dots\dots\dots$

8.2 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots\dots\dots$

8.3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots\dots\dots$

8.4 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots\dots\dots$

9.



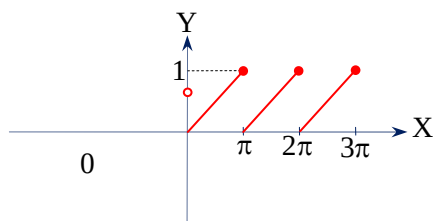
9.1 $f(0)$ =

9.2 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ =

9.3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ =

9.4 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ =

10.



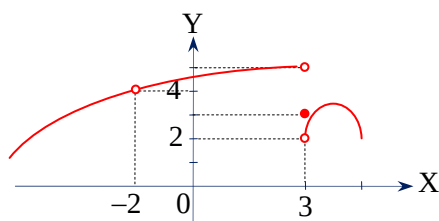
10.1 $f(\pi)$ =

10.2 $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$ =

10.3 $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$ =

10.4 $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ =

11.



11.1 $f(-2)$ =

11.2 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ =

11.3 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ =

11.4 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ =

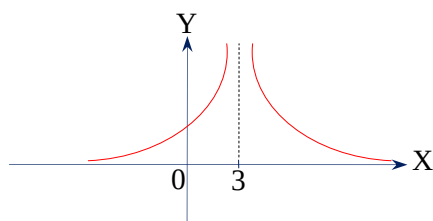
11.5 $f(3)$ =

11.6 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ =

11.7 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ =

11.8 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ =

12.



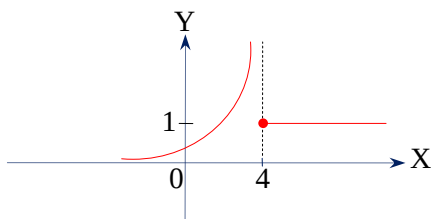
12.1 $f(3)$ =

12.2 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ =

12.3 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ =

12.4 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ =

13.



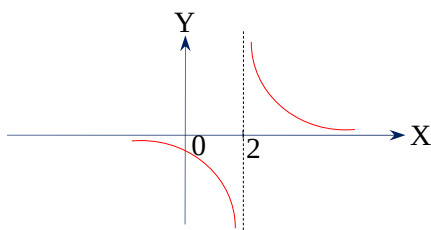
13.1 $f(4)$ =

13.2 $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ =

13.3 $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ =

13.4 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ =

14.



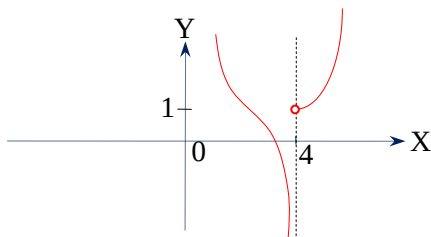
14.1 $f(2)$ =

14.2 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ =

14.3 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ =

14.4 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ =

15.



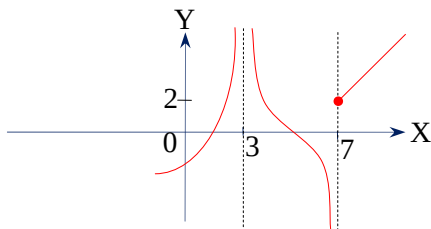
15.1 $f(4)$ =

15.2 $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ =

15.3 $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ =

15.4 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ =

16.



16.1 $f(3)$ =

16.2 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ =

16.3 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ =

16.4 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ =

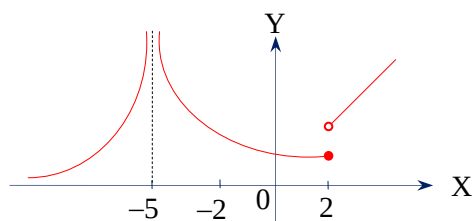
16.5 $f(7)$ =

16.6 $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x)$ =

16.7 $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x)$ =

16.8 $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ =

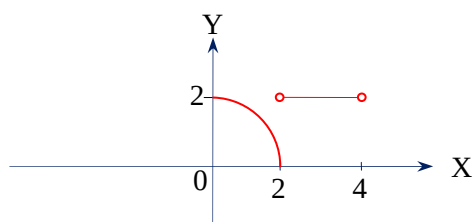
17.



จากกราฟ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ จะหาค่าไม่ได้

เมื่อ $a = \dots\dots\dots$

18.



จากกราฟ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ จะหาค่าได้

เมื่อ a มีค่าอย่างไร $\dots\dots\dots$

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงหาค่าของลิมิตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $\lim_{x \rightarrow 3} \left(x^2 - \frac{1}{3}x + 2 \right)$

1.2 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 9x + 8}{x + 8}$

1.3 $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x + 4} - 5 \right)$

1.4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 9}{x^3 - 12x + 3}$

1.5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 4x + 2}{x^3 + 4x - 6}$

1.6 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x+1}$

1.7 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^4 + 12x^3 - 17x + 2)$

1.8 $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^3 - 3x - 1}$

1.9 $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + x + 5}$

1.10 $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x + 4}$

1.11 $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x - 4}$

1.12 $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x + 3}$

1.13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{x}$

1.14 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x - 1}$

1.15 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 1}{x^2 - 9}$

1.16 $\lim_{x \rightarrow -2} |x + 2|$

1.17 $\lim_{x \rightarrow 2} |x^3 - 2x^2|$

1.18 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{|x^2 + 3x|}$

1.19 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 5^{-x}}{5^x + 5^{-x}}$

1.20 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (4x^2 + 4x + 9)^{\frac{2}{3}}$

1.21 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{(1 + x^4)^{\frac{5}{2}}}$

1.22 $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^{\frac{2}{3}} + 3\sqrt{x}}{4 - \frac{16}{x}}$

1.23 $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} + \sqrt{9 - x^2} \right)$

1.24 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

1.25 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$

1.26 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x - 4}{2x^2 - 7x - 4}$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงหาคำของ

1.1 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$

.....

.....

.....

.....

.....

1.2 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

.....

.....

.....

.....

.....

1.3 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$

.....

.....

.....

.....

.....

1.4 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

.....

.....

.....

.....

.....

1.5 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

.....

.....

.....

.....

.....

1.6 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6}$

.....

.....

.....

.....

.....

1.7 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}$

.....

.....

.....

.....

.....

1.8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$

.....

.....

.....

.....

.....

1.9 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

.....

.....

.....

.....

.....

1.10 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

.....

.....

.....

.....

.....

$$1.11 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$$

.....

.....

.....

.....

$$1.12 \quad \lim_{y \rightarrow 4} \frac{16 - y^2}{2 - \sqrt{y}}$$

.....

.....

.....

.....

$$1.13 \quad \lim_{t \rightarrow 9} \frac{t - 9}{\sqrt{t} - 3}$$

.....

.....

.....

.....

$$1.14 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$$

.....

.....

.....

.....

$$1.15 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$$

.....

.....

.....

.....

$$1.16 \quad \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 + t^2 - 5t + 3}{t^3 - 3t + 2}$$

.....

.....

.....

.....

$$1.17 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

.....

.....

.....

.....

$$1.18 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}}$$

.....

.....

.....

.....

$$1.19 \quad \lim_{y \rightarrow 2} \sqrt{\frac{y^2 - 4}{y^2 - 3y + 2}}$$

.....

.....

.....

.....

$$1.20 \quad \lim_{h \rightarrow 1} \frac{(2h - 3)(\sqrt{h} - 1)}{2h^2 + h - 3}$$

.....

.....

.....

.....

2. จงหาค่าของ

2.1
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.2
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.3
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.4
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.5
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{9-x+x^2}-3}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.6
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{9-x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.7
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4+\sqrt{x}}-2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.8
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{12-\sqrt{x^2}}-3}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกหัดที่ 5

จงหาคำของ

1. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^6 - 12x + 1)$

.....

.....

.....

.....

.....

2. $\lim_{x \rightarrow -2} x^{10}$

.....

.....

.....

.....

.....

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3}$

.....

.....

.....

.....

.....

4. $\lim_{y \rightarrow 6} \frac{y + 6}{y^2 - 36}$

.....

.....

.....

.....

.....

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 4}$

.....

.....

.....

.....

.....

6. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{3x}$

.....

.....

.....

.....

.....

7. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{\sqrt{1+h}} - 1 \right]$

.....

.....

.....

.....

.....

8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x-3}$

.....

.....

.....

.....

.....

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}$

.....

.....

.....

.....

.....

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

.....

.....

.....

.....

.....

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+9}-3}{x}$

.....

.....

.....

.....

.....

12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

.....

.....

.....

.....

.....

13. $f(x) = \begin{cases} x-1 & , \quad x \leq 3 \\ 3x-7 & , \quad x > 3 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

.....

.....

.....

.....

.....

14. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \geq 0 \\ x-2 & , \quad x < 0 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

.....

.....

.....

.....

.....

15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x}{x+3}$

.....

.....

.....

.....

.....

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2+3x}$

.....

.....

.....

.....

.....

17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

.....

.....

.....

.....

.....

18. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

.....

.....

.....

.....

.....

19. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2+1]-(x^2+1)}{h}$

.....

.....

.....

.....

.....

20. $\lim_{x \rightarrow 8} (x^{\frac{2}{3}} + \sqrt{2x})$

.....

.....

.....

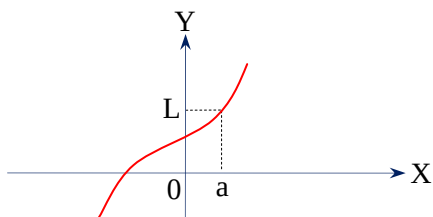
.....

.....

แบบฝึกหัดที่ 6

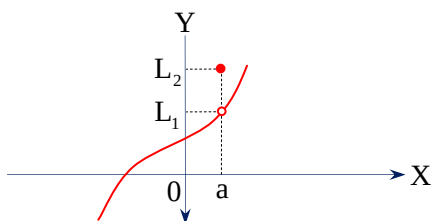
1. จงพิจารณาว่ากราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่

1.1

ก. ที่ $x=a$ กราฟต่อเนื่องหรือไม่.....

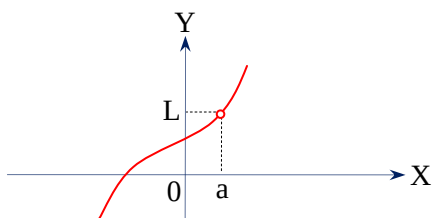
ข. ขาดสมบัติข้อ.....

1.2

ก. ที่ $x=a$ กราฟต่อเนื่องหรือไม่.....

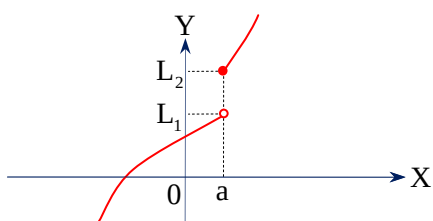
ข. ขาดสมบัติข้อ.....

1.3

ก. ที่ $x=a$ กราฟต่อเนื่องหรือไม่.....

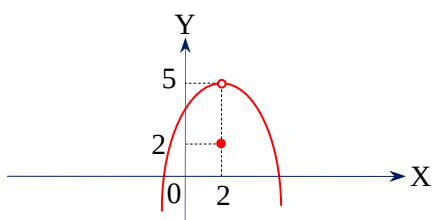
ข. ขาดสมบัติข้อ.....

1.4

ก. ที่ $x=a$ กราฟต่อเนื่องหรือไม่.....

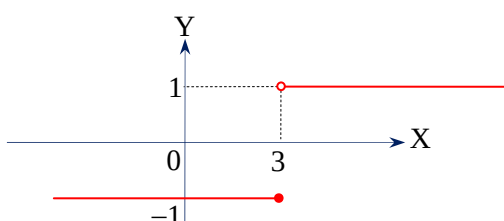
ข. ขาดสมบัติข้อ.....

1.5

ก. ที่ $x=a$ กราฟต่อเนื่องหรือไม่.....

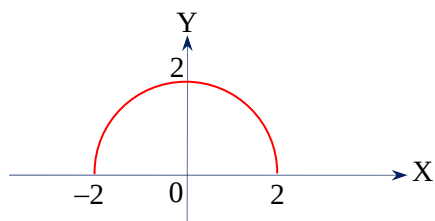
ข. ขาดสมบัติข้อ.....

1.6

ก. ที่ $x=a$ กราฟต่อเนื่องหรือไม่.....

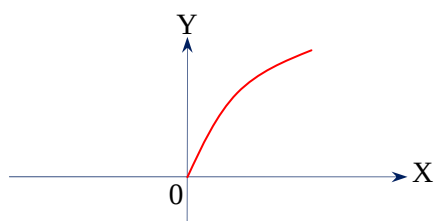
ข. ขาดสมบัติข้อ.....

1.7

ก. ที่ $x=a$ กราฟต่อเนื่องหรือไม่.....

ข. ขาดสมบัติข้อ.....

1.8

ก. ที่ $x=a$ กราฟต่อเนื่องหรือไม่.....

ข. ขาดสมบัติข้อ.....

2. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่

2.1 $f(x) = 3x^2 - 5$ เมื่อ $x=0$

.....

.....

.....

.....

.....

2.2 $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ เมื่อ $x=3$

.....

.....

.....

.....

.....

2.3 $f(x) = |x|$ เมื่อ $x=0$

.....

.....

.....

.....

.....

2.4 $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$ เมื่อ $x=-2$

.....

.....

.....

.....

.....

2.5 $f(x) = \begin{cases} x-1 & , x \leq 3 \\ 3x-7 & , x > 3 \end{cases}$ เมื่อ $x=3$

.....

.....

.....

.....

.....

$$2.6 \quad f(x) = \begin{cases} 3-x & , \quad x < 0 \\ 3x+2 & , \quad x \geq 0 \end{cases} \text{ เมื่อ } x = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$2.7 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & , \quad x \neq -2 \\ 1 & , \quad x = -2 \end{cases} \text{ เมื่อ } x = -2$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$2.8 \quad f(x) = \begin{cases} 2x+3 & , \quad x \leq 4 \\ 7+\frac{16}{x} & , \quad x > 4 \end{cases} \text{ เมื่อ } x = 4$$

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหาจุดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง เมื่อกำหนดฟังก์ชันดังแต่ละข้อ

$$3.1 \quad f(x) = \frac{x}{x^2-1} \quad \dots\dots\dots$$

$$3.2 \quad f(x) = \frac{x-4}{x^2-16} \quad \dots\dots\dots$$

$$3.3 \quad f(x) = \frac{x}{|x|-3} \quad \dots\dots\dots$$

$$3.4 \quad f(x) = \frac{5}{x} + \frac{2x}{x+4} \quad \dots\dots\dots$$

$$3.5 \quad f(x) = \frac{x+3}{|x^2+3x|} \quad \dots\dots\dots$$

4. จงหาค่าของ k ที่ทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่อง

$$4.1 \quad f(x) = \begin{cases} 7x-2 & , \quad x \leq 1 \\ kx^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$4.2 \quad f(x) = \begin{cases} kx^2 & , \quad x \leq 2 \\ 2x+k & , \quad x > 2 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 1 \\ Ax+5 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$ จงหาค่า A ที่ทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x=1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกหัดที่ 7

1. กำหนดให้ $y = 2x + 3$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x

1.1 เมื่อ x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 5

.....

.....

.....

1.2 เมื่อ x เปลี่ยนจาก 4 ไปเป็น 2

.....

.....

.....

2. กำหนดให้ $y = 2x^2 - 3x + 5$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x

2.1 เมื่อ x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 3

.....

.....

.....

2.2 เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 1

.....

.....

.....

3. กำหนดให้ $y = \frac{1}{x}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x

3.1 เมื่อ x เปลี่ยนจาก 5 ไปเป็น 8

.....

.....

.....

3.2 เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น -2

.....

.....

.....

4. กำหนดให้ $y = \sqrt{x+2}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x
เมื่อ x เปลี่ยนไปเป็น $x+h$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. กำหนดให้ $y = 2x^2 - 3$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x

5.1 ขณะ $x = 3$

.....

.....

.....

.....

5.2 ขณะ $x = -1$

.....

.....

.....

5.3 ขณะ $x = a$, a เป็นค่าคงตัว

.....

.....

.....

6. กำหนดให้ $y = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x

6.1 ขณะ $x = 5$

.....

.....

.....

.....

6.2 ขณะ $x = 7$

.....

.....

.....

.....

6.3 ขณะ x มีค่าใด ๆ

.....

.....

.....

7. กำหนดให้ $y = \begin{cases} x^2 & , x > 0 \\ 2x-1 & , x \leq 0 \end{cases}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x

7.1 ขณะ $x = 3$

.....

.....

.....

.....

.....

7.2 ขณะ $x = -1$

.....

.....

.....

.....

.....

8. กำหนดให้ $y = |x+1|$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x

8.1 ขณะ $x = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

8.2 ขณะ $x = -2$

.....

.....

.....

.....

.....

9. กำหนดพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (A) มีความยาวด้าน x เมตร จงคำนวณหา

9.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้าน
เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 5 เมตร ไปเป็น 8 เมตร

.....

.....

.....

.....

.....

- 9.2 อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้าน
เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 6 เมตร ไปเป็น 3 เมตร

.....

.....

.....

.....

- 9.3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้าน ขณะที่ด้านยาว
ยาว x เมตร

.....

.....

.....

.....

- 9.4 อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้าน
ขณะที่ $x = 12$ เมตร

.....

.....

.....

.....

10. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของทรงกลมเทียบกับรัศมี

- 10.1 เมื่อรัศมียาว 7 เมตร

.....

.....

.....

.....

- 10.2 เมื่อรัศมีเป็นจำนวนใด ๆ

.....

.....

.....

.....

11. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของทรงกระบอก

11.1 เทียบกับความสูงของทรงกระบอก เมื่อรัศมีคงตัว

.....

.....

.....

.....

11.2 เทียบกับรัศมีของทรงกระบอก เมื่อความสูงคงตัว

.....

.....

.....

.....

12. ปริมาณของสาร N กรัม ในน้ำยาเปลี่ยนไปตามเวลา t ตามสมการ $N = \frac{8}{t+1}$ เมื่อ t มีหน่วยเป็นนาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ N เทียบกับ t ขณะ $t = 5$ นาที

.....

.....

.....

.....

13. ประจุไฟฟ้าสองประจุอยู่ห่างกัน x หน่วย แรงผลัก F เป็นไปตามสมการ $F = \frac{k}{x^2}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวที่มากกว่าศูนย์ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ F เทียบกับ x

.....

.....

.....

.....

14. วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงเป็นระยะทาง S เมตร ในเวลา t วินาที ซึ่ง $S = t^3 - 3t$ วัตถุนั้นจะมีความเร็วขณะที่ $t = 5$ วินาที เท่ากับกี่เมตรต่อวินาที

.....

.....

.....

.....

15. อนุภาคหนึ่งมีความเร็ว $v = 2t^2 + 5t - 2$ จงหาความเร่งของอนุภาคนี้ เมื่อเวลา $t = 2$ วินาที

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

16. การโยนลูกบอลขึ้นไปในอากาศในแนวตั้งมีสมการการเคลื่อนที่เป็น $S = 80t - 16t^2$ เมื่อ S เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร และ t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วของลูกบอลขณะลูกบอลอยู่สูงจากพื้นดิน 64 เมตร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกหัดที่ 8

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ (โดยใช้บทนิยาม)

1. $f(x) = 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $f(x) = x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $f(x) = 5x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. $f(x) = x^2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. $f(x) = x^2 + 2x - 4$

.....

.....

.....

.....

.....

6. $f(x) = \frac{1}{x}$

.....

.....

.....

.....

.....

7. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

.....

.....

.....

.....

.....

8. $f(x) = \sin x$ และกำหนด $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

9. $f(x) = \cos x$

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกหัดที่ 9

1. จงหาค่าต่อไปนี้

1.1 $\frac{d}{dx}(3)$

.....

1.3 $\frac{d}{dx}(3x)$

.....

1.5 $\frac{d}{dx}(3x-2)$

.....

1.7 $\frac{d}{dx}(x^2)$

.....

1.9 $\frac{d}{dx}(x^3+2x^2-5x+4)$

.....

1.11 $\frac{d}{dx}[(2x-1)^{\frac{1}{3}}]$

.....

.....

.....

1.13 $\frac{d}{dx}[(x-1)(x+2)]$

.....

.....

.....

1.2 $\frac{d}{dx}(0)$

.....

1.4 $\frac{d}{dx}(-5x)$

.....

1.6 $\frac{d}{dx}(5x-1)$

.....

1.8 $\frac{d}{dx}(3x^5)$

.....

1.10 $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})$

.....

1.12 $\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2-1})$

.....

.....

.....

1.14 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

.....

.....

.....

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

2.1 $y = 10x^3 + 5x$

.....

2.2 $y = 6 - 5x + 3x^4$

.....

2.3 $y = \frac{x^2}{4} + \frac{x^5}{10}$

.....

2.4 $y = 2x^{\frac{3}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$

.....

2.5 $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$

.....

$$2.6 \quad y = (2x)^{\frac{1}{3}} + (2x)^{\frac{2}{3}}$$

$$2.7 \quad y = (2 - 3x^2)^3$$

$$2.8 \quad y = (4 - x^2)^3$$

$$2.9 \quad y = \sqrt{9 - 4x^2}$$

$$2.10 \quad y = x\sqrt{5 - 3x}$$

$$2.11 \quad y = x\sqrt{8 + x^2}$$

$$2.12 \quad y = x^2\sqrt{3 - 4x}$$

$$2.13 \quad y = \frac{x+1}{2x-1}$$

$$2.14 \quad y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$$

$$2.15 \quad y = \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$2.16 \quad y = \frac{\sqrt{16+5x}}{x}$$

$$2.17 \quad y = \frac{\sqrt{5-2x}}{2x+1}$$

$$2.18 \quad y = \sqrt[3]{\frac{2+3x}{2-3x}}$$

$$2.19 \quad y = \sqrt{\frac{x^2-5}{10-x}}$$

$$2.20 \quad y = \sqrt{\frac{1-cx}{1+cx}} \quad ; \quad c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$2.21 \quad y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}} \quad ; \quad a \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

.....

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ที่จุดที่กำหนดให้

$$3.1 \quad f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 4 \quad \text{ที่ } x = 0$$

.....

.....

$$3.2 \quad f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^2 + 6 \quad \text{ที่ } x = 1$$

.....

.....

$$3.3 \quad f(x) = (2x^2 - 3x + 1)(x - x^2) \quad \text{ที่ } x = 2$$

.....

.....

$$3.4 \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{ที่ } x = 6$$

.....

.....

$$3.5 \quad f(x) = \sqrt{2x+1} \quad \text{ที่ } x = 4$$

.....

.....

4. วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ตามสมการ $S = 2t^3 + 3t^2 - 5$ เมื่อ S เป็นระยะทางที่มีหน่วยเป็นเมตร
 t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วของวัตถุนี้ขณะ $t = 5$ วินาที
-
-
-
-
-
-
-
-

แบบฝึกหัดที่ 10

จงหาคำของ

1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

.....

.....

.....

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

.....

.....

.....

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6}$

.....

.....

.....

4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}$

.....

.....

.....

5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

.....

.....

.....

6. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

.....

.....

.....

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$

.....

.....

.....

8. $\lim_{y \rightarrow 4} \frac{16 - y^2}{2 - \sqrt{y}}$

.....

.....

.....

9. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{t - 9}{\sqrt{t} - 3}$

.....

.....

.....

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

.....

.....

.....

11. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

.....

.....

.....

12. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 + t^2 - 5t + 3}{t^3 - 3t + 2}$

.....

.....

.....

13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

.....

.....

.....

15. $\lim_{y \rightarrow 2} \sqrt{\frac{y^2-4}{y^2-3y+2}}$

.....

.....

.....

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

.....

.....

.....

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-1}$

.....

.....

.....

14. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3-8}{x^2-4}}$

.....

.....

.....

16. $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{(2h-3)(\sqrt{h}-1)}{2h^2+h-3}$

.....

.....

.....

18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

.....

.....

.....

20. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

.....

.....

.....

แบบฝึกหัดที่ 11

1. จงหาความชันของเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาสมการของเส้นสัมผัสโค้ง ณ จุดนั้น

1.1 $y = 3x - 2$ เมื่อจุดสัมผัสคือ $(0, -2)$

.....

.....

.....

1.2 $y = x^2 + 3$ เมื่อจุดสัมผัสคือ $(-1, 4)$

.....

.....

.....

1.3 $y = 5 + 4x - x^2$ เมื่อ $x = 2$

.....

.....

.....

1.4 $y = \frac{2}{x+1}$ เมื่อ $x = 1$

.....

.....

.....

1.5 $y = \frac{x-2}{x+3}$ เมื่อ $x = 3$

.....

.....

.....

2. จงหาจุดสัมผัสโค้ง $y = 2x - x^2$ ที่ทำให้เส้นโค้งมีความชันเท่ากับ 4

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหาจุดสัมผัสโค้ง $y = x^2 + 3x - 2$ ที่ทำให้เส้นโค้งมีความชันเท่ากับ 1
.....
.....
.....
.....
4. จงหาสมการเส้นสัมผัสโค้ง $y = x^2 + 3x$ ที่ทำขนานกับเส้นตรง $x + y - 4 = 0$
.....
.....
.....
.....
5. จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นสัมผัสโค้ง $y = x^2 + x - 3$ ที่จุด $(0, 2)$ และผ่านจุด $(-1, 1)$
.....
.....
.....
.....
6. จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสโค้ง $y = 3x^2 + x$ ที่จุด $(1, 4)$
.....
.....
.....
.....
7. จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสโค้ง $y = 4x^3 - 2x$ เมื่อ $x = 0$
.....
.....
.....
.....
8. ถ้าเส้นตรง $y = ax$ ขนานกับเส้นสัมผัสโค้ง $y = 3x^2 - 5$ ที่จุด $(1, -2)$ จงหาค่า a
.....
.....
.....
.....

- ที่มา : แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.6 เล่ม 2 : กนกวลี อษณกรกลและรณชัย มาเจริญทรัพย์

แบบฝึกหัดที่ 12

จงหาอนุพันธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $y = (2x-1)^2$

.....

.....

.....

2. $y = (2-3x)^{\frac{1}{3}}$

.....

.....

.....

3. $y = (4-x^2)^3$

.....

.....

.....

4. $y = (5-x^2)^{\frac{1}{2}}$

.....

.....

.....

5. $y = \sqrt{x^2-1}$

.....

.....

.....

6. $y = \sqrt{9-4x^2}$

.....

.....

.....

7. $y = -\frac{1}{(x+2)^2}$

.....

.....

.....

8. $y = \frac{1}{(x^2-3x)^2}$

.....

.....

.....

9. $y = \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$

.....

.....

.....

10. $y = \sqrt{9-4x^2}$

.....

.....

.....

11. $y = \sqrt[3]{\frac{2+3x}{x-3x}}$

.....

.....

.....

12. $y = \sqrt{\frac{x^2-5}{10-x^2}}$

.....

.....

.....

13. $y = \sqrt{\frac{1-cx}{1+cx}}$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

.....

.....

.....

.....

.....

14. $y = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกหัดที่ 13

1. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6$

.....

.....

.....

1.2 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

.....

.....

.....

1.3 $f(x) = 3x^2 + 2x - \sqrt{x}$

.....

.....

.....

1.4 $f(x) = \frac{2}{x-1}$

.....

.....

.....

1.5 $f(x) = (3-x^2)^4$

.....

.....

.....

1.6 $f(x) = \sqrt{1+2x}$

.....

.....

.....

1.7 $f(x) = x\sqrt{3x-2}$

.....

.....

.....

2. กำหนดให้ $y = \sqrt{x}(x^2 - 1)$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

.....

.....

.....

3. กำหนดให้ $y = (x^3 - 2x)^2$ จงหา $\frac{d^3y}{dx^3}$

.....

.....

.....

4. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{3x+2}$ จงหา $f''(x)$

.....

.....

.....

5. จงหา y' และ y'' เมื่อกำหนดค่าตัวแปรให้ในแต่ละข้อ

5.1 $y = \sqrt{8+2x}$ เมื่อ $x = 1$

.....

.....

.....

.....

5.2 $y = (2+x)^3$ เมื่อ $x = 0$

.....

.....

.....

.....

5.3 $y = \sqrt{\frac{1-x}{3+x}}$ เมื่อ $x = 0$

.....

.....

.....

.....

6. กำหนด $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $f'(1) = 0$ และ $f''(0) = 4$ จงหา $f'(1)$

.....

.....

.....

.....

.....

7. กำหนด $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $f'(-1) = 0$ และ $f''(-1) = -6$ จงหา $f(a+b)$

.....

.....

.....

.....

.....

8. กำหนดให้ $f(x) = \frac{2x-a}{x-b}$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0 ถ้า $f'(0) = 4$ และ $f''(0) = -8$ จงหา $f(0)$

.....

.....

.....

.....

.....

9. ปล่อยวัตถุจากที่สูงลงสู่พื้นดิน วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $S = 16t^2$ ในเวลา t วินาที จงหา

9.1 ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้หลังจากปล่อยวัตถุไป 5 วินาที

.....

.....

9.2 ความเร็วขณะเวลา $t = 3$ วินาที

.....

.....

.....

9.3 ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ

.....

.....

.....

9.4 ความเร่งขณะเวลา $t = 10$ วินาที

.....

.....

.....

10. วัตถุชิ้นหนึ่งมีสมการเคลื่อนที่ $S = t^3 - 5t^2 + 7t - 3$ เมื่อ S เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร และ t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที ขณะที่วัตถุมีความเร่งเท่ากับ 2 เมตร/วินาที² จงหา

10.1 ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้

.....

.....

.....

10.2 ความเร็วของวัตถุ

.....

.....

.....

11. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่เป็นสมการ $S = \frac{t^2}{2} + \frac{4t}{t+1}$ เมื่อ S เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร และ t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วของอนุภาคขณะที่อนุภาคมีความเร่งเป็นศูนย์

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกหัดที่ 14

1. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

1.2 $x^2 + 2xy + y^2 = 4$

.....

.....

.....

.....

.....

1.3 $x^4 + 3xy^2 - y^3 - 27 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

1.4 $x^3 + y^3 = 2xy$ ที่จุด $(1, 1)$

.....

.....

.....

.....

.....

1.5 $2x^3 - x^3y + y^2 = 4$ ที่จุด $(0, 2)$

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

2.1 $x^2 + y^2 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

2.2 $y^2 = x^3$

.....

.....

.....

.....

.....

2.3 $x^2y^2 = 4$

.....

.....

.....

.....

.....

2.4 $xy^2 + y^2 - 4 = 0$

.....

.....

.....

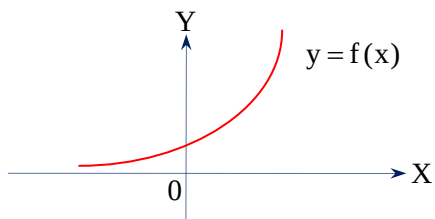
.....

.....

แบบฝึกหัดที่ 15

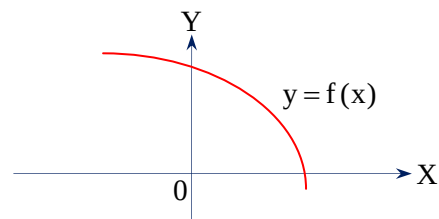
1. จงพิจารณารูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

1.1



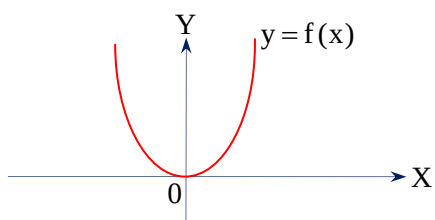
ตอบ.....

1.2



ตอบ.....

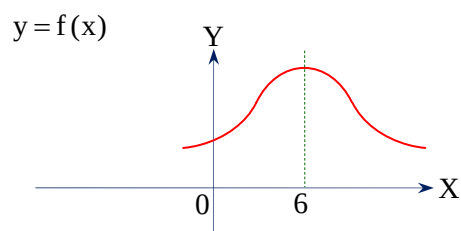
1.3



เมื่อ $x < 0$ ตอบ.....

เมื่อ $x > 0$ ตอบ.....

1.4



เมื่อ $0 < x < 6$ ตอบ.....

เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ ตอบ.....

2. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดในช่วงใด

2.1 $y = 2x^2 - 3x + 6$

.....
.....
.....
.....
.....

2.2 $y = 4 + 5x - x^2$

.....
.....
.....
.....
.....

2.3 $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$

.....
.....
.....
.....
.....

2.4 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

.....

.....

.....

2.5 $y = 2x^2 - x^4$

.....

.....

.....

2.6 $y = x^{\frac{5}{2}} - 5\sqrt{x}$

.....

.....

.....

2.7 $y = \sqrt{4 - x^2}$

.....

.....

.....

2.8 $y = \sqrt{x^2 - 6}$

.....

.....

.....

2.9 $y = x\sqrt{x-1}$

.....

.....

.....

2.10 $y = \frac{x+2}{x-3} ; x \neq 3$

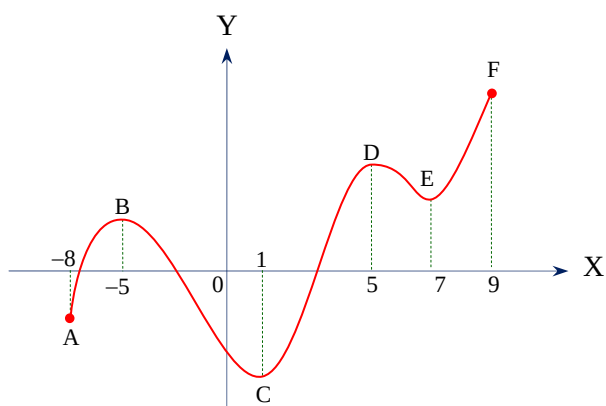
.....

.....

.....

แบบฝึกหัดที่ 16

1. จากรูปที่กำหนดให้

1.1 จุดใดบ้างที่ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ในช่วง $(-8, 9)$

ตอบ.....

1.2 จุดใดให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ในช่วง $(-8, 0)$

ตอบ.....

1.3 จุดใดให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ในช่วง $(0, 8)$

ตอบ.....

1.4 จุดใดบ้างที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ในช่วง $(-8, 9)$

ตอบ.....

1.5 จุดใดให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ในช่วง $(-5, 5)$

ตอบ.....

1.6 จุดใดให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ในช่วง $[-8, 9]$

ตอบ.....

1.7 จุดใดให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ในช่วง $[-8, 9]$

ตอบ.....

1.8 จุดใดให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ในช่วง $[-8, 7]$

ตอบ.....

2. จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$

.....

.....

.....

.....

2.2 $f(x) = 4x^3 - 3x^2$

.....

.....

.....

2.3 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 12$

.....

.....

.....

2.4 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

.....

.....

.....

2.5 $f(x) = x^7 - 7x^6$

.....

.....

.....

2.6 $f(x) = (x^2 - 1)^2$

.....

.....

.....

2.7 $f(x) = \sqrt{x} - x$

.....

.....

.....

2.8 $f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x+4}$

.....

.....

.....

แบบฝึกหัดที่ 17

1. ผลบวกของเลขจำนวนหนึ่งกับสามเท่าของเลขอีกจำนวนหนึ่งเท่ากับ 60 จงหาว่าผลคูณของเลขสองจำนวนนี้มีค่ามากที่สุดเป็นเท่าไร

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงหาความยาวของเส้นรอบรูปที่มีค่าน้อยที่สุดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่มีพื้นที่ 25 ตารางหน่วย

.....

.....

.....

.....

.....

3. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 นิ้ว จะมีเส้นรอบรูปยาวที่สุดเท่าไร

.....

.....

.....

.....

.....

4. ด้านทั้งสามของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูยาว 6 เซนติเมตรเท่ากัน ดังนั้นด้านที่เหลือจะยาวกี่เซนติเมตร จึงจะทำให้รูปสี่เหลี่ยมนี้มีพื้นที่มากที่สุด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. ชาวสวนมีพื้นที่สวนเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าอยู่ติดกับชาวสวนอีกผู้หนึ่ง สวนของชาวสวนผู้นี้มีพื้นที่ 432 ตารางวา ถ้าเพื่อนชาวสวนจะจ่ายค่าทำรั้วด้านที่ติดกันให้แก่ชาวสวนครึ่งหนึ่ง อยากทราบว่าชาวสวนจะเลือกทำสวนที่มีขนาดเท่าไรจึงจะทำให้ชาวสวนผู้นี้เสียค่าทำรั้วน้อยที่สุด

.....

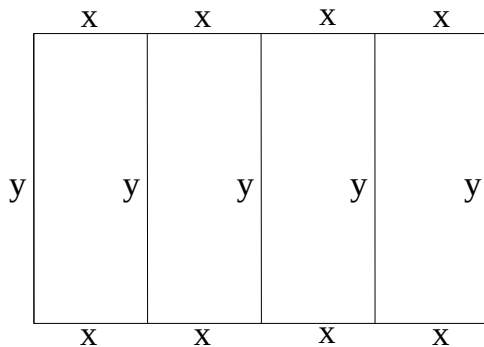
.....

.....

.....

.....

6. ชายคนหนึ่งมีไม้ระแนงสำหรับทำรั้วได้ยาว 80 เมตร เขาต้องการล้อมบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าพร้อมทั้งกันเป็นสี่ช่องเท่า ๆ กัน ดังรูป พื้นที่มากที่สุดที่เขาจะล้อมได้เป็นเท่าไร



.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีความยาวด้านทั้งสามเป็น 90, 120, 150 หน่วย จงหาความกว้างและความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่บรรจุในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนี้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งบรรจุในครึ่งวงกลม รัศมี r หน่วย ถ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่มากที่สุดจะมีด้านยาวยาวกี่หน่วย

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากบรรจุในกราฟพาราโบลา $y^2 = 12x$ โดยมีด้านด้านหนึ่งอยู่บนเส้นตรง $x = 4$ จะมีพื้นที่มากที่สุดเท่าไร

.....

.....

.....

.....

.....

10. จงหาส่วนสูงของกรวยกลมที่มีปริมาตรมากที่สุดที่สามารถบรรจุลงในทรงกลมที่มีรัศมี r หน่วย

.....

.....

.....

.....

.....

11. จงหาความสูงของทรงกระบอกที่มีปริมาตรมากที่สุดที่สามารถบรรจุลงในกรวยกลม

.....

.....

.....

.....

.....

12. ต้องการทำกล่องฝาเปิดด้านบนให้มีปริมาตรมากที่สุดด้วยแผ่นสังกะสีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีด้านยาว a หน่วย โดยตัดเนื้อสังกะสีที่มุมออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากัน แล้วจึงงอสังกะสีขึ้น เพื่อทำเป็นด้านข้างของกล่อง อยากทราบว่า จะต้องตัดสังกะสีที่มุมเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวของด้านยาวกี่หน่วย

.....

.....

.....

.....

.....

13. ผู้ผลิตวิทยุขายวิทยุได้ x เครื่องต่อสัปดาห์ ถ้าขายวิทยุเครื่องละ p บาท และกำหนดให้ $5x = 375 - 3p$ ถ้าทุนในการผลิตคือ $500 + 13x + \frac{1}{2}x^2$ บาท จงหาว่าผู้ผลิตควรจะผลิตวิทยุสัปดาห์ละกี่เครื่องจึงจะได้กำไรมากที่สุด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

14. พ่อค้าซื้อข้าวสารมาถังละ 50 บาท ถ้าเขาขายถังละ 80 บาท ใน 1 เดือนจะขายได้ 1,000 ถัง แต่ถ้าเขาลดราคาลงถังละ x บาท เขาจะขายข้าวสารได้เพิ่มขึ้นอีกเดือนละ $50x$ ถัง ดังนั้นเขาจะได้กำไรมากที่สุด จากจำนวนที่ขายได้ใน 1 เดือน เมื่อเขาตั้งราคาขายข้าวถังละเท่าไร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

15. พ่อค้าคนหนึ่งทราบว่า ถ้าเขาตั้งราคาสินค้าอย่างหนึ่งขึ้นละ 20 บาท ในหนึ่งสัปดาห์เขาจะขายสินค้าได้ 1,000 ชิ้น ถ้าเขาลดราคาขึ้นละ 1 บาท เขาจะขายสินค้าได้เพิ่มอีก 100 ชิ้น เป็น 1,100 ชิ้น ถ้าเขาลดราคาลงขึ้นละ 2 บาท จะขายสินค้าได้เพิ่มอีก 200 ชิ้น เป็น 1,200 ชิ้น ถ้าเป็นเช่นนั้นไปเรื่อย ๆ เขาควรจะตั้งราคาสินค้าเท่าไรจึงจะได้เงินจากการขายมากที่สุด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

16. การผลิตสินค้าชิ้นหนึ่งของบริษัทแห่งหนึ่ง เสียค่าใช้จ่ายหน่วยละ $0.2x + 4 + \frac{400}{x}$ บาท รัฐบาลเก็บภาษีอีกหน่วยละ 22 บาท บริษัทขายหน่วยละ $400 - 2x$ บาท โดยที่ x หมายถึง จำนวนหน่วยที่ผลิตต่อเดือน ถ้าจะให้ได้กำไรต่อเดือนมากที่สุด บริษัทจะต้องผลิตสินค้าเป็นจำนวนเท่าไร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

17. กำหนดให้รถขนส่งสินค้าชนิดหนึ่งมีการเผาไหม้ของน้ำมันเป็น $\frac{1}{400} \left(\frac{1,600}{x} + x \right)$ ลิตรต่อกิโลเมตร เมื่อ x เป็นอัตราเร็ว มีหน่วยเป็นกิโลเมตรต่อชั่วโมง ถ้าต้องการขับรถเป็นระยะทาง 600 กิโลเมตร โดยจ่ายค่าน้ำมันน้อยที่สุดจะต้องขับรถด้วยอัตราเร็วเท่าไร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

18. ในการประมาณการของการปลูกมันสำปะหลัง พบว่าถ้าขุดมันสำปะหลังขณะนี้จะได้ผลผลิต 100 กิโลกรัม และขายได้กิโลกรัมละ 2.00 บาท แต่ถ้ายังไม่ขุดและรอต่อไปจะได้ผลผลิตมันสำปะหลังเพิ่มขึ้นสัปดาห์ละ 10 กิโลกรัม แต่ราคาขายจะลดลงไปสัปดาห์ละ 0.10 บาทต่อกิโลกรัม ดังนั้นควรขายมันสำปะหลังเมื่อใดจึงจะได้เงินมากที่สุด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

19. ถ้าถือว่าความแข็งแรงของเสาเหลี่ยม (มีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า) แปรผันโดยตรงกับความกว้างและความหนาของเสา จงหาว่า เสาจะต้องมีขนาดเป็นเท่าไร จึงจะทำให้เสามีความแข็งแรงที่สุด เมื่อต้องการจะเลื่อยเปิดปีกจากต้นซึ่งกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว d หน่วย

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

20. จงหาจุดบนเส้นโค้ง $2y = x^2$ ที่ใกล้จุด $(4,1)$ มากที่สุด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

21. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $(a-x)^2 + (b-x)^2 + (c-x)^2$ มีค่าน้อยที่สุด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

22. หลอดไฟแขวนอยู่เหนือทางเดินสูง 12 ฟุต เด็กชายคนหนึ่งสูง 5 ฟุต เดินไปตามทางเดินนั้น จงหาว่า เงามของเด็กยาวออกด้วยอัตราเร็วเท่าไร ถ้าหากเขาเดินหนีจากดวงไฟด้วยอัตราเร็ว 168 ฟุตต่อวินาที

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

23. บันไดยาว 25 ฟุต วางพิงกำแพงปลายด้านล่างของบันไดถูกผลักห่างออกไปจากกำแพงในอัตราเร็ว 6 ฟุตต่อวินาที ส่วนบนของบันไดจะเคลื่อนที่ต่ำลงมาในอัตราเร็วเท่าใด ในขณะที่ปลายล่างอยู่ห่างจากกำแพง 7 ฟุต

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

24. เด็กคนหนึ่งกำลังเล่นวูวซึ่งสูงจากพื้น ถ้าลมพัดเอวาวูวออกไปจากเด็กคนนั้นในแนวราบด้วยอัตราเร็ว 25 ฟุตต่อวินาที เด็กคนนั้นจะต้องปล่อยสายป่านด้วยอัตราเร็วเท่าไรเมื่อวูวอยู่ห่างจากเขา 500 ฟุต

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกหัดที่ 18

1. จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 $f(x) = 5$

.....
.....

1.2 $f(x) = 3x$

.....
.....

1.3 $f(x) = 8x^2$

.....
.....

1.4 $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 3$

.....
.....

1.5 $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}$

.....
.....2. จงหา $F(x)$ เมื่อกำหนด $F'(x)$ ให้ดังต่อไปนี้

2.1 $F'(x) = 3$

.....
.....

2.2 $F'(x) = 4x^3$

.....
.....

2.3 $F'(x) = 7x^5 + 3x^3 - x^2 + 3$

.....
.....

2.4 $F'(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}$

.....
.....

2.5 $F'(x) = x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}$

.....
.....

แบบฝึกหัดที่ 19

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $\int 3dx =$

1.2 $\int xdx =$

1.3 $\int x^3 dx =$

1.4 $\int 3x^5 dx =$

1.5 $\int \frac{1}{x^4} dx =$

1.6 $\int -\frac{3}{x^2} dx =$

1.7 $\int \sqrt{x} dx =$

1.8 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$

1.9 $\int (3x^2 + x - 2)dx =$

1.10 $\int (5x^3 - 4x^2 + 4x + 1)dx =$

1.11 $\int (2x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{2}{5}})dx$

1.12 $\int (4x^{-3} - x^{-4} + 1)dx$

1.13 $\int \left(\frac{x^4 + 6x^2 - 7}{x^4} \right) dx$

1.14 $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

1.15 $\int \left(\frac{5x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}} \right) dx$

1.16 $\int x^2(3x + 4)dx$

1.17 $\int (x - 2)(x - 5)dx$

1.18 $\int y^2(6y^3 - 4y + 8)dy$

1.19 $\int (5t^2 + 2t - 9)dt$

1.20 $\int (4x + 5)^{10} dx$

1.21 $\int (1-3x)^{12} dx$

.....

.....

.....

1.22 $\int \frac{1}{(x+3)^4} dx$

.....

.....

.....

1.23 $\int x(x^2+5)^6 dx$

.....

.....

.....

1.24 $\int 4x\sqrt{1-2x^2} dx$

.....

.....

.....

1.25 $\int x^2\sqrt{x^3-1} dx$

.....

.....

.....

2. จากเงื่อนไขที่กำหนดให้ จงหา $f(x)$

2.1 $f'(x) = 3x^2$ และ $f(0) = 1$

.....

.....

.....

2.2 $f'(x) = 3x^2 - 4$ และ $f(2) = 1$

.....

.....

.....

3. จงหาสมการเส้นโค้งเมื่อกำหนดความชันของเส้นโค้งเท่ากับ $2x+6$ และเส้นโค้งผ่านจุด $(1, 8)$

.....

.....

.....

.....

.....

4. จงหาสมการเส้นโค้งที่มีความชันเท่ากับ $2x^2-3x+4$ เมื่อเส้นโค้งนี้ตัดแกน X ที่จุด $(-2, 0)$

.....

.....

.....

.....

.....

5. ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ เป็น $2x - 6$ และความชันของเส้นโค้งนี้ที่จุด $(0, -6)$ เท่ากับ 8 แล้ว $f(2)$ มีค่าเท่าใด
-
-
-
-
-
6. เส้นโค้งมีความชัน $2x^2 + 3x - 1$ และเส้นโค้งนี้ตัดแกน X ที่จุด $(-1, 0)$ ถ้าเส้นโค้งนี้ตัดกับเส้นตรง $x + y + \frac{11}{6} = 0$ ที่จุด (a, b) จงหา $a + b$ ที่มีค่ามากที่สุด
-
-
-
-
-
-
7. เส้นโค้งเส้นหนึ่งผ่านจุด $(2, a)$ และ $(3, 2)$ ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด (x, y) ใด ๆ เป็น $x^2 - 2$ แล้วจงหาค่า a
-
-
-
-
-
-
8. ถ้าเส้นโค้ง $y = f(x)$ มีอนุพันธ์อันดับที่สองเท่ากับ $6x - 10$ จงหาสมการเส้นโค้งที่มีความชันของเส้นโค้งนี้ที่จุด $(1, 1)$ มีค่าเท่ากับ -1
-
-
-
-
-
-

9. เส้นโค้งเส้นหนึ่งมีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันที่จุดใด ๆ บนเส้นโค้งเท่ากับ $6x+8$ ถ้าเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ตั้งฉากกับเส้นตรง $x+6y+12=0$ ที่จุด $(1,2)$ จงหา

9.1 ความชันของเส้นโค้ง ณ จุดที่เส้นโค้งนี้ตัดกับแกน Y

9.2 จุดที่เส้นโค้งนี้ตัดกับเส้นตรง $x+1=0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. กลิ้งลูกบอลไปตามพื้นราบด้วยความเร็วต้น 20 เมตร/วินาที เนื่องจากพื้นมีแรงเสียดทาน จึงทำให้ลูกบอลมีความเร็วลดลง 5 เมตร/วินาที² จงหาระยะทางที่ลูกบอลเคลื่อนที่ไปจนหยุดนิ่ง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

11. วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ตามแนวตรงจากจุดหยุดนิ่งด้วยความเร่ง $4t+2$ เมตร/วินาที² จงหา

11.1 ความเร็วของวัตถุเมื่อ $t=2$ วินาที

11.2 ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้เมื่อ $t=9$ วินาที

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกหัดที่ 20

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $\int_{-1}^1 x dx$

.....

.....

.....

.....

1.2 $\int_1^3 5x dx$

.....

.....

.....

.....

1.3 $\int_0^2 (x^2 - 3x + 2) dx$

.....

.....

.....

.....

1.4 $\int_1^3 -\frac{4}{x^3} dx$

.....

.....

.....

.....

1.5 $\int_0^{-1} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

.....

.....

.....

.....

1.6 $\int_1^2 x(x^2 - 3) dx$

.....

.....

.....

.....

1.7 $\int_{-1}^0 \frac{1}{(x+3)^4} dx$

.....

.....

.....

.....

1.8 $\int_3^5 x^2(4x - 3) dx$

.....

.....

.....

.....

1.9 $\int_1^3 (1-x)^6 dx$

.....

.....

.....

.....

1.10 $\int_0^2 x(x^2 - 1)^5 dx$

.....

.....

.....

.....

2. จงใช้สมบัติของอินทิกรัลตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

..... 2.1 $\int_1^8 (x^3 + 2)dx = \int_1^3 (x^3 + 2)dx + \int_3^8 (x^3 + 2)dx$

..... 2.2 $\int_3^3 (5x + 2)dx = 0$

..... 2.3 $\int_2^2 5(4x - 3)dx = 5\int_2^2 (4x - 3)dx = 0$

..... 2.4 $\int_0^5 4x^2 dx = -4\int_5^0 x^2 dx$

..... 2.5 $\int_1^{10} 3dx = 30$

..... 2.6 $\int_2^5 (3x^2 + x - 4)dx = \int_2^5 3x^2 dx + \int_2^5 x dx - \int_2^5 4dx$

..... 2.7 $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = -\int_2^1 x^3 dx$

..... 2.8 $\int_2^3 x\sqrt{x} dx = \int_2^3 x dx \cdot \int_2^3 \sqrt{x} dx$

..... 2.9 $\int_2^3 (x-1)^2 dx = \int_2^3 x^2 dx - \int_2^3 2x dx + \int_2^3 1 dx$

..... 2.10 $\int_1^2 x^2 dx = \int_1^5 x^2 dx + \int_5^2 x^2 dx$

3. กำหนดให้ $\int_0^3 f(x)dx = 8$, $\int_0^4 f(x)dx = 5$, $\int_4^5 f(x)dx = 2$ จงหา

3.1 $\int_0^5 f(x)dx$

3.2 $\int_3^4 f(x)dx$

.....
.....
.....
.....
.....

3.3 $\int_3^5 f(x)dx$

3.4 $\int_3^0 f(x)dx$

.....
.....
.....
.....
.....

3.5 $\int_4^0 f(x)dx$

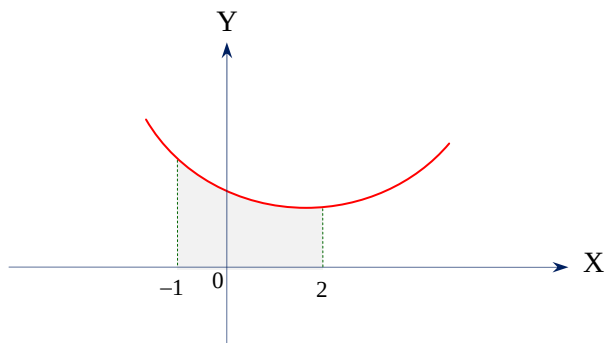
3.6 $\int_5^3 f(x)dx$

.....
.....
.....
.....
.....

แบบฝึกหัดที่ 21

1. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งต่อไปนี้กับแกน X

1.1 $y = x^2 - 4x + 5$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 2$



.....

.....

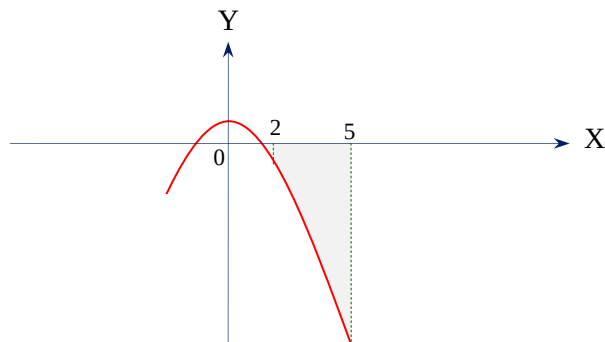
.....

.....

.....

.....

1.2 $y = 1 - x^2$ จาก $x = 2$ ถึง $x = 5$



.....

.....

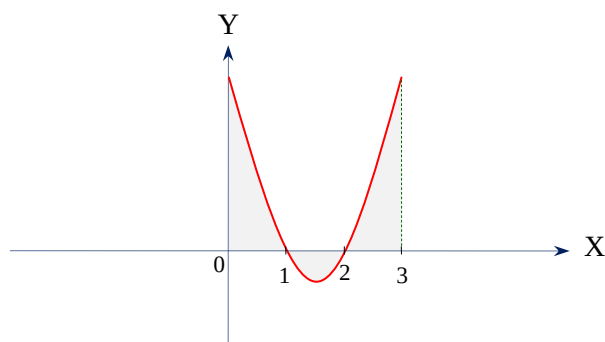
.....

.....

.....

.....

1.3 $y = x^2 - 3x + 2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 5$



.....

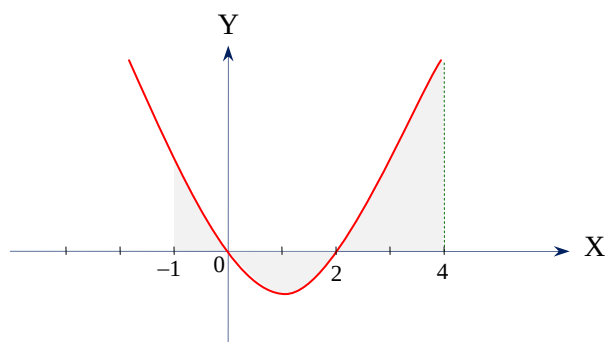
.....

.....

.....

.....

1.4 $y = x^2 - 2x$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 4$



.....

.....

.....

.....

.....

1.5 $y = 3x^2 + 2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.6 $y = x^2 + 7x + 6$ จาก $x = -3$ ถึง $x = -2$

.....

.....

.....

.....

.....

1.7 $y = x^2 - x$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

1.8 $y = 3 - 2x - x^2$

.....

.....

.....

.....

.....

1.9 $y = x(x - 2)(x - 3)$

.....

.....

.....

.....

.....

1.10 $y = x^3 - 4x$

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 2x + 1$ และ $y = 2x + 5$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ และ $y = 4x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 4x + 3$ และ $y = -x^2 + 2x + 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....