

บทที่ 6 พหุนาม

6.1 การบวกและการลบเอกนาม

6.2 การบวกและการลบพหุนาม

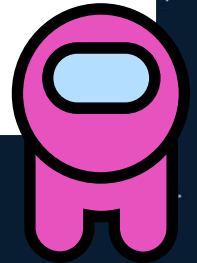
6.3 การคูณพหุนาม

6.4 การหารพหุนามด้วยเอกนาม



จุดประสงค์ของบทเรียน

1. นักเรียนสามารถหาผลบวก ผลลบ ผลคูณของพหุนาม และหาผลหารของพหุนามด้วยเอกนามในรูปแบบผลสำเร็จ
2. นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องพหุนามไปใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์





ทบทวนความรู้



สมบัติของเลขยกกำลัง

เมื่อ a, b เป็นจำนวนใด ๆ โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ m และ n เป็นจำนวนเต็ม

$$1. a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$2. a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$3. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4. (ab)^n = a^n b^n$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$



❖ สมบัติของการบวกและการคูณจำนวนจริง
เมื่อ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. สมบัติการสลับที่

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

2. สมบัติของการเปลี่ยนหมู่

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

3. สมบัติการแจกแจง

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$



❖ สมบัติของการบวกและการคูณจำนวนจริง
เมื่อ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

4. สมบัติของหนึ่งและศูนย์

$$a \times 1 = a = 1 \times a$$

$$a + 0 = a = 0 + a$$

$$a \times 0 = 0 = 0 \times a$$

$$0 \div a = 0 \text{ โดยที่ } a \neq 0$$

$$\text{ถ้า } a \times b = 0 \text{ และ } a = 0 \text{ หรือ } b = 0$$



6.1 การบวกและการลบเอกนาม



จำนวนที่อยู่ในรูปของค่าคงตัวหรือตัวแปรซึ่งอยู่ในรูปการดำเนินการต่าง ๆ

$$3, 3x, \frac{1}{7}x^2, 4x - 7$$



นิพจน์ (expression)

การเขียนนิพจน์ที่อยู่ในรูปการคูณระหว่างค่าคงตัวและตัวแปรหลาย ๆ ตัวได้หลายแบบ

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{array}{l} (-5) \times a \times a \times b \xrightarrow{\text{เขียนในรูป}} \begin{array}{l} (-5) \cdot a \cdot a \cdot b \\ (-5) \cdot a^2 \cdot b \\ (-5)(a^2)(b) \\ -5a^2b \end{array} \end{array}$$

นิยมเขียนในรูปนี้ เพราะเป็นรูปที่สั้น
และกะทัดรัด



การเขียนการคูณระหว่างค่าคงตัวและตัวแปร ทำได้ดังนี้

1. **กรณีที่มีค่าคงตัวมากกว่าหนึ่งตัว** ให้หาผลคูณของค่าคงตัวก่อน แล้วจึงเขียนในรูปการคูณระหว่างค่าคงตัวกับตัวแปร และเขียนค่าคงตัวไว้หน้าตัวแปร

ตัวอย่างเช่น $2 \times 5 \times 7 \times a$ เขียนเป็น

2. **กรณีที่มีตัวแปรหลายตัว** นิยมเขียนเรียงตามลำดับตัวอักษรโดยเขียนเรียงชิดกัน และใช้สัญลักษณ์เลขยกกำลังในกรณีที่เป็นไปได้

ตัวอย่างเช่น $\frac{1}{3} \times a \times a \times b$ เขียนเป็น

$3 \times a \times b \times a \times c \times \frac{6}{3}$ เขียนเป็น



3. กรณีที่มีค่าคงตัวเป็น 1 ไม่ต้องเขียน 1 ถ้าค่าคงตัวเป็น -1 ให้เขียนเฉพาะเครื่องหมายลบหน้าตัวแปรทั้งหมด

ตัวอย่างเช่น $1 \times a \times b$ เขียนเป็น

$(-1) \times a \times b$ เขียนเป็น

นิพจน์ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการคูณของค่าคงตัวกับตัวแปรตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไป และเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก เรียกว่า **เอกนาม (monomial)**

ตัวอย่างของเอกนาม

11

$2x$

$0.5x^2$

$-\frac{2}{3}xy^2$

ตัวอย่างที่ไม่เป็นเอกนาม

$\frac{4x}{y}$

$0.5x^{-2}$

$2x + 5y$



เอานาม

ส่วนที่เป็นค่าคงตัว

สัมประสิทธิ์ของเอานาม

ส่วนที่อยู่ในรูปของตัวแปร
หรือการคูณกันของตัวแปร



เอกนามสองเอกนามคล้ายกัน ก็ต่อเมื่อ

1. เอกนามทั้งสองมีตัวแปรชุดเดียวกัน
- และ 2. เลขชี้กำลังของตัวแปรตัวเดียวกันในแต่ละเอกนามเท่ากัน

ตัวอย่างของเอกนามที่คล้ายกัน

x คล้ายกันกับ $2x$

$\frac{1}{2}x^2y$ คล้ายกันกับ $3x^2y$

$8abc^2$ คล้ายกันกับ $-2abc^2$

ตัวอย่างของเอกนามที่ไม่คล้ายกัน

x ไม่คล้ายกันกับ $2y$

$\frac{1}{2}x^2y$ ไม่คล้ายกันกับ $3xy^2$

$8abc^2$ ไม่คล้ายกันกับ $-2ab^2c$



แบบฝึกทักษะที่ 6.1

1. จงบอกสัมประสิทธิ์ของเอกนามต่อไปนี้

1) $-5x$

2) $-\frac{x}{3}$

3) $2yz^2$

4) $-\frac{3}{7}x^2y^4$

5) $3^2y^7z^2$

2. จงบอกว่าเอกนามที่กำหนดให้แต่ละคู่คล้ายกันหรือไม่

1) $4x$ กับ $-9x$

2) $3x^2y$ กับ $2yx^2$

3) $5yz$ กับ $-2yz^2$

4) $2y^5$ กับ $2y^5$

5) $-4tx^3$ กับ $3tx^3$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.1

1. จงบอกสัมประสิทธิ์ของเอกนามต่อไปนี้

1) $-5x$ -5

2) $-\frac{x}{3}$ $-\frac{1}{3}$

3) $2yz^2$ 2

4) $-\frac{3}{7}x^2y^4$ $-\frac{3}{7}$

5) $3^2y^7z^2$ 3^2 หรือ 9

2. จงบอกว่าเอกนามที่กำหนดให้แต่ละคู่คล้ายกันหรือไม่

1) $4x$ กับ $-9x$ เป็นเอกนามที่คล้ายกัน

2) $3x^2y$ กับ $2yx^2$ เป็นเอกนามที่คล้ายกัน

3) $5yz$ กับ $-2yz^2$ เป็นเอกนามที่ไม่คล้ายกัน

4) $2y^5$ กับ $2y^5$ เป็นเอกนามที่คล้ายกัน

5) $-4tx^3$ กับ $3tx^3$ เป็นเอกนามที่คล้ายกัน



การบวกเอกนาม

การหาผลบวกเอกนามที่คล้ายกันใช้หลักเกณฑ์ ดังนี้

ผลบวกของเอกนามที่คล้ายกัน

$$= (\text{ผลบวกของสัมประสิทธิ์}) \times (\text{ส่วนที่อยู่ในรูปของตัวแปรหรือการคูณกันของตัวแปร})$$

สำหรับเอกนามที่ไม่คล้ายกัน ไม่สามารถเขียนผลบวกในรูปเอกนามได้ แต่เขียนผลบวกในรูปการบวกได้

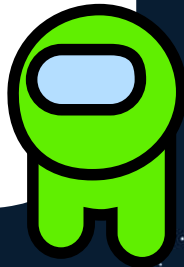


ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวก $3x^2y + 5x^2y$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวก $2a^2 + (-5a^2) + 7a^2$

วิธีทำ



การลบเอกนาม

การหาผลลบเอกนามที่คล้ายกันใช้หลักเกณฑ์ ดังนี้

ผลลบของเอกนามที่คล้ายกัน

$$= (\text{ผลลบของสัมประสิทธิ์}) \times (\text{ส่วนที่อยู่ในรูปของตัวแปรหรือการคูณกันของตัวแปร})$$

สำหรับเอกนามที่ไม่คล้ายกัน ไม่สามารถเขียนผลลบในรูปเอกนามได้ แต่เขียนผลลบในรูปการลบได้

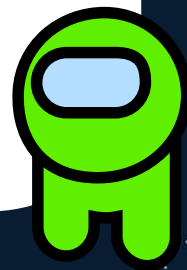


ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลลัพธ์ของ $3y - 5y - (-2y)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลัพธ์ของ $2a^2 - (-5a^2) + 7a^2 - 4a^2$

วิธีทำ

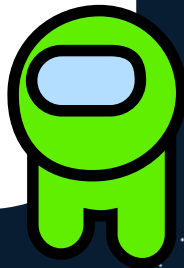


ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลลัพธ์ของ $4xy^2 - (-3xy^2) + xy^2$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{5}{4}mn + \frac{15}{4}mn - 6mn$

วิธีทำ



แบบฝึกทักษะที่ 6.1

3. จงหาผลลัพธ์

1) $-7y + 9y - 2y$

2) $14y^2 - 8y^2 + 7y^2$

3) $z^2 - (-5z^2) + 6z^2$

4) $16UV + 7UV - 9UV$

5) $-12s^2t + 4s^2t - 13s^2t + (-8s^2t)$



เฉลยแบบฝึกหัดที่ 6.1

3. จงหาผลลัพธ์

$$\begin{aligned} 1) \quad -7y + 9y - 2y &= (-7 + 9 - 2)y \\ &= 0 \cdot y \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 14y^2 - 8y^2 + 7y^2 &= (14 - 8 + 7)y^2 \\ &= 13y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad z^2 - (-5z^2) + 6z^2 &= (1 + 5 + 6)z^2 \\ &= 12z^2 \end{aligned}$$



เฉลยแบบฝึกหัดที่ 6.1

$$\begin{aligned} 4) \quad 16UV + 7UV - 9UV &= (16 + 7 - 9)UV \\ &= 14UV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad -12s^2t + 4s^2t - 13s^2t + (-8s^2t) &= (-12 + 4 - 13 - 8)s^2t \\ &= -29s^2t \end{aligned}$$



6.2 การบวกและการลบพหุนาม



พิจารณานิพจน์แต่ละข้อต่อไปนี้

$$9, 7a^2, -3b^2$$

1) $9, 7a^2, -3b^2$

คือนิพจน์ ที่เป็นเอกนาม

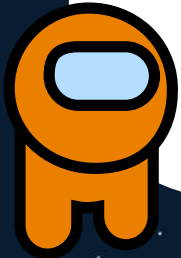
2) $9 + 7a^2$

คือนิพจน์ ที่เป็นการบวกของเอกนามสองเอกนาม

3) $9 + 7a^2 + (-3b^2)$

คือนิพจน์ ที่เป็นการบวกของเอกนามสามเอกนาม

เราเรียก นิพจน์ในข้อ 1) 2) และ 3) ว่า **พหุนาม**



นิพจน์ที่อยู่ในรูปเอกนาม หรือเขียนอยู่ในรูปการบวกกันของเอกนาม ตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไปได้ เรียกว่า **พหุนาม (polynomial)**

เราจะเรียกแต่ละเอกนามที่ปรากฏในพหุนามว่า **พจน์ (term)**

และจะเรียกเอกนามที่คล้ายกันในพหุนามว่า **พจน์ที่คล้ายกัน (like term)**

ตัวอย่างเช่น

$-4x^3 + 3x^2 - 2x + x^2$ เป็นพหุนามที่มีพจน์ คือ $-4x^3$, $3x^2$, $-2x$, x^2
และมี $3x^2$ และ x^2 เป็นพจน์ที่คล้ายกัน



ในกรณีที่พหุนามมีพจน์บางพจน์เป็นพจน์ที่คล้ายกัน สามารถรวมพจน์ที่คล้ายกันเข้าด้วยกัน เพื่อให้พหุนามในรูปที่ไม่มีพจน์ที่คล้ายกันเลย

ตัวอย่างเช่น

$$1) 2x + x - 2$$

$$2) -2x^2 + 5 + 7x^2 - 2$$

เรียกพหุนามที่ไม่มีพจน์ที่คล้ายกันเลยว่า **พหุนามในรูปผลสำเร็จ** (polynomial in the simplest)

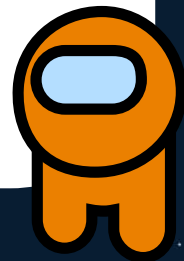


ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนพหุนาม $7x^2 + 9x - 5x^2 - 2x + 6$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนพหุนาม $4xy - 8xy - 10x - y$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนพหุนาม $2x^2y + y^2 - 3 + x^2y + 9$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนพหุนาม $-6a - 6b - 5a - 3c - 5b + c$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

วิธีทำ



แบบฝึกทักษะที่ 6.2

1. จงเขียนพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้เป็นพหุนามในรูปผลสำเร็จ

1) $-5x + 1 + 7x - 11$

2) $4z^2 + z - z^2 - 18$

3) $x - xy + 4 + x - 3xy$

4) $10 + 13rs^2 - 6rs - 12s^2r + 5rs$

5) $b + 2b - 3c + 8 - 4b + 5c^2$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.2

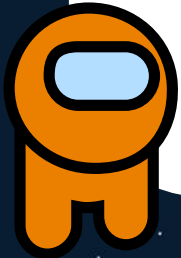
1. จงเขียนพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้เป็นพหุนามในรูปผลสำเร็จ

$$\begin{aligned} 1) \quad -5x + 1 + 7x - 11 &= (-5x + 7x)(1 - 11) \\ &= 2x - 10 \end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามในรูปผลสำเร็จ คือ $2x - 10$

$$\begin{aligned} 2) \quad 4z^2 + z - z^2 - 18 &= (4z^2 - z^2) + z - 18 \\ &= 3z^2 + z - 18 \end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามในรูปผลสำเร็จ คือ $3z^2 + z - 18$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.2

$$\begin{aligned} 3) \quad x - xy + 4 + x - 3xy &= (x + x) + (-xy - 3xy) + 4 \\ &= 2x - 4xy + 4 \\ &= -4xy + 2x + 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามในรูปผลสำเร็จ คือ $-4xy + 2x + 4$

$$\begin{aligned} 4) \quad 10 + 13rs^2 - 6rs - 12s^2r + 5rs &= 10 + 13rs^2 - 12s^2r + (-6rs + 5rs) \\ &= 10 + 13rs^2 - 12s^2r + -rs \end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามในรูปผลสำเร็จ คือ $10 + 13rs^2 - 12s^2r + -rs$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.2

$$\begin{aligned} 5) \quad b + 2b - 3c + 8 - 4b + 5c^2 &= (b + 2b - 4b) - 3c + 8 + 5c^2 \\ &= -b - 3c + 8 + 5c^2 \\ &= 5c^2 - b - 3c + 8 \end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามในรูปผลสำเร็จ คือ $5c^2 - b - 3c + 8$



การบวกพหุนาม

การหาผลบวกของพหุนามใช้หลักเกณฑ์ ดังนี้

การหาผลบวกของพหุนาม ทำได้โดยการนำพหุนามมาเขียนในรูปการบวก และถ้ามีพจน์ที่คล้ายกัน ให้บวกพจน์ที่คล้ายกันเข้าด้วยกัน

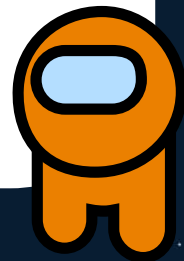


ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกของ $6x^2 + 10$ และ $-5x^2 - x + 1$

วิธีทำ

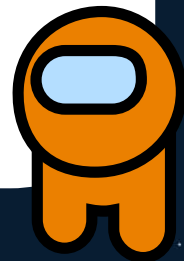
ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของ $8x - 1$, $-x^2 - 9x$ และ $x^2 + 4$

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกของ $13r - 2t - 2s$ และ $-14r + 11s - 7t$

วิธีทำ



การลบพหุนาม

การหาผลลบของพหุนามสองพหุนาม ทำได้ดังนี้

$$\text{พหุนามตัวตั้ง} - \text{พหุนามตัวลบ} = \text{พหุนามตัวตั้ง} + \text{พหุนามตรงข้ามของพหุนามตัวลบ}$$

พิจารณาพหุนามสองพหุนามต่อไปนี้

$$3x - 6 \quad \text{และ} \quad 2x + 9$$

เขียนพหุนามสองพหุนามในรูปการลบ และหาผลลบให้เป็นพหุนามในรูปผลสำเร็จ ได้ดังนี้



วิธีทำ $(3x - 6) - (2x + 9) = (3x - 6) + [-(2x + 9)]$

$$= (3x - 6) + (-2x - 9)$$
$$= 3x - 6 - 2x - 9$$
$$= x - 15$$

เรียกพหุนาม $x - 15$ ว่าผลลบของพหุนาม $3x - 6$ และ $2x + 9$

นั่นคือ $(3x - 6) - (2x + 9) = x - 15$



เนื่องจาก พหุนามตรงข้ามของพหุนามตัวลบ เท่ากับผลบวกของพจน์ตรงข้ามของแต่ละพจน์ของพหุนามตัวลบนั่น

ดังนั้น การลบของพหุนามใช้หลักเกณฑ์ ดังนี้

การลบพหุนามด้วยพหุนาม ทำได้โดยการบวกพหุนามตัวตั้งด้วยพจน์ตรงข้ามของแต่ละพจน์ของพหุนามตัวลบ



ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลบ $(15x + 2) - (x^2 + 12x - 6)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลลบของ $(3x^2 - 5x - 10) - (3x^2 - 14x - 10)$

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลลบ $(4x^2 + 7x - 12) - (5x^2 - 6x + 11)$

วิธีทำ



แบบฝึกทักษะที่ 6.2

2. จงหาผลบวกและผลลบของพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้พหุนามแรกที่กำหนดให้เป็นตัวตั้ง

1) $4z^2 + 7z - 5$ กับ $9z + 1$

2) $13s - 8t$ กับ $6r + 3s - 2t$

3) $x^2 - \frac{2}{3}x + 2$ กับ $\frac{1}{2}x^2 - x + 10$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.2

2. จงหาผลบวกและผลลบของพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้พหุนามแรกที่กำหนดให้เป็นตัวตั้ง

1) $4z^2 + 7z - 5$ กับ $9z + 1$

การหาผลบวก

$$\begin{aligned} & (4z^2 + 7z - 5) + (9z + 1) \\ &= 4z^2 + 7z - 5 + 9z + 1 \\ &= 4z^2 + (7z + 9z) + (-5 + 1) \\ &= 4z^2 + 16z - 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก คือ $4z^2 + 16z - 4$

การหาผลลบ

$$\begin{aligned} & (4z^2 + 7z - 5) - (9z + 1) \\ &= 4z^2 + 7z - 5 + (-9z) + (-1) \\ &= 4z^2 + 7z - 5 - 9z - 1 \\ &= 4z^2 - 2z - 6 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลลบ คือ $4z^2 - 2z - 6$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.2

2) $13s - 8t$ กับ $6r + 3s - 2t$

การหาผลบวก

$$\begin{aligned}(13s - 8t) + (6r + 3s - 2t) \\ &= 13s - 8t + 6r + 3s - 2t \\ &= 6r + (13s + 3s) + (-8t - 2t) \\ &= 6r + 16s - 10t\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก คือ $6r + 16s - 10t$

การหาผลลบ

$$\begin{aligned}(13s - 8t) - (6r + 3s - 2t) \\ &= 13s - 8t - 6r - 3s + 2t \\ &= -6r + 10s - 6t\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลลบ คือ $-6r + 10s - 6t$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.2

$$3) x^2 - \frac{2}{3}x + 2 \quad \text{กับ} \quad \frac{1}{2}x^2 - x + 10$$

การหาผลบวก

$$\left(x^2 - \frac{2}{3}x + 2 \right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 10 \right)$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x + 2 + \frac{1}{2}x^2 - x + 10$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 12$$

ดังนั้น ผลบวก คือ $\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 12$

การหาผลลบ

$$\left(x^2 - \frac{2}{3}x + 2 \right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 10 \right)$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x + 2 - \frac{1}{2}x^2 + x - 10$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - 8$$

ดังนั้น ผลลบ คือ $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - 8$



6.3 การคูณพหุนาม



การคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม

พิจารณาการหาผลคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม ต่อไปนี้

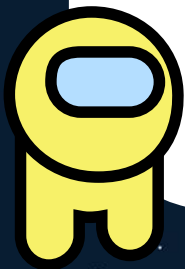
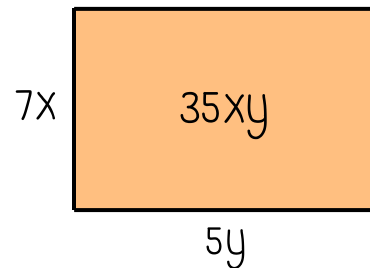
$$1. (7x)(5y) = (7 \times 5)(x \times y) = 35xy$$

เราอาจจะแสดงการหาผลคูณ $(7x)(5y)$

โดยเปรียบเทียบกับการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง

$7x$ หน่วย และความยาว $5y$ หน่วย ได้ดังนี้

จะเห็นว่า รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้มีพื้นที่เป็น $(7x)(5y) = 35xy$ ตารางหน่วย



$$\begin{aligned} 2. (9x^3)(-x^2) &= (9)(-1)(x^3 \cdot x^2) \\ &= (9)(-1)(x^{3+2}) \\ &= -9x^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. (3x^2y^2)(-8xy^2) &= (3)(-8)(x^2 \cdot x)(y^2 \cdot y^2) \\ &= (3)(-8)(x^{2+1})(y^{2+2}) \\ &= -24x^3y^4 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ในการหาผลคูณระหว่างเอกนามกับเอกนามนั้น จะนำค่าคงตัวในแต่ละเอกนามมาคูณกัน และนำตัวแปรในแต่ละเอกนามมาคูณกัน โดยใช้สมบัติของเลขยกกำลัง



การคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ $(-4x)(7x)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ $(-x^2y)(-10xy)$

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ $(-9xy^2)(11xy)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณของ $(10x^2y)(-6xy^2)$

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณของ $(8y^2z^2)(-7y^2z^2)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลคูณของ $(10x^2y)(-6xy^2)$

วิธีทำ



แบบฝึกทักษะที่ 6.3

1. จงหาผลคูณในแต่ละข้อที่กำหนดให้

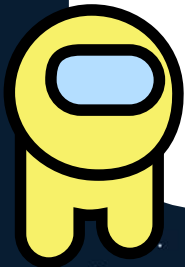
1) $(9xy)(3)$

2) $(-2xy)(-y)$

3) $(-4x)(-13xy)$

4) $(-3xy)(4x^3)$

5) $(-14y^2)(2yz^2)$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.3

1. จงหาผลคูณในแต่ละข้อที่กำหนดให้

$$\begin{aligned} 1) (9xy)(3) &= (9)(3)xy \\ &= 27xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (-2xy)(-y) &= (-2)(-1)xy^2 \\ &= 2xy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) (-4x)(-13xy) &= (-4)(-13)(x \cdot x)(y) \\ &= 52x^2y \end{aligned}$$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.3

$$\begin{aligned} 4) (-3xy)(4x^3) &= (-3)(4)(x \cdot x^3)y \\ &= -12x^4y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) (-14y^2)(2yz^2) &= (-14)(2)(y^2 \cdot y)z^2 \\ &= -28y^3z^2 \end{aligned}$$



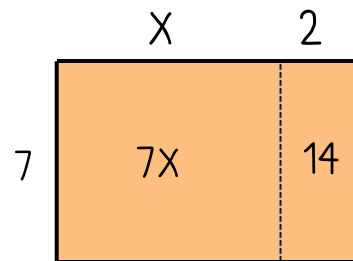
การคูณระหว่างเอกนามกับพหุนาม

พิจารณาการหาผลคูณระหว่างเอกนามกับพหุนาม ซึ่งทำได้โดยใช้สมบัติการแจกแจง และใช้หลักการคูณเอกนาม

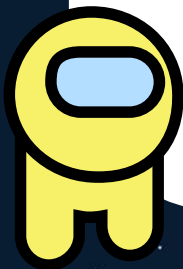
$$\begin{aligned} 1. \quad 7(x + 2) &= (7)(x) + (7)(2) && \text{(สมบัติการแจกแจง)} \\ &= 7x + 14 && \text{(การคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม)} \end{aligned}$$

เราอาจจะแสดงการหาผลคูณ $7(x + 2)$

โดยเปรียบเทียบกับการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาว $x + 2$ หน่วย และความกว้าง y หน่วย ได้ดังนี้



จะเห็นว่า รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้มีพื้นที่เป็น $(7)(x + 2) = 7x + 14$ ตารางหน่วย



$$2. (2x)(x + 3) = (2x)(x) + (2x)(3)$$

(สมบัติการแจกแจง)

$$= 2x^2 + 6x$$

(การคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม)

$$3. (9 - 4x)(-x) = [9 + (-4x)](-x)$$

$$= (9x)(-x) + (-4x)(-x) \quad (\text{สมบัติการแจกแจง})$$

$$= -9x^2 + 4x^2$$

(การคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม)



ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ $x(x - 1)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ $(10x + 9)(2x)$

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ $(-5x)(x^2 + 8)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณของ $2(3x^2 - 4x - 7)$

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณของ $(3x^2)(2x^2 - 7x)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลคูณของ $(-4x^2)(8x^2 + 5x - 6)$

วิธีทำ



แบบฝึกทักษะที่ 6.3

2. จงหาผลคูณในแต่ละข้อที่กำหนดให้

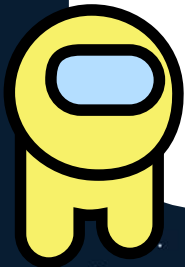
$$1) \frac{1}{2}(4x + 6)$$

$$2) (-4)(x^2 - 6x)$$

$$3) (-7x^2 + 10x)(-x^2)$$

$$4) (9x)(x^2 + 2x - 3)$$

$$5) (8x)(-6x^3 + 5x^2 - 11x)$$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.3

2. จงหาผลคูณในแต่ละข้อที่กำหนดให้

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{1}{2}(4x + 6) &= \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 2 \end{pmatrix} (4x) + \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 2 \end{pmatrix} (6) \\ &= 2x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad (-4)(x^2 - 6x) &= (-4)(x^2) - (-4)(6x) \\ &= -4x^2 + 24x \end{aligned}$$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.3

$$\begin{aligned} 3) (-7x^2 + 10x)(-x^2) &= (-7x^2)(-x^2) + (10x)(-x^2) \\ &= 7x^4 - 10x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) (9x)(x^2 + 2x - 3) &= (9x)(x^2) + (9x)(2x) - (9x)(3) \\ &= 9x^3 + 18x^2 - 27x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) (8x)(-6x^3 + 5x^2 - 11x) &= (8x)(-6x^3) + (8x)(5x^2) - (8x)(11x) \\ &= -48x^4 + 40x^3 - 88x^2 \end{aligned}$$



การคูณระหว่างพหุนามกับพหุนาม

พิจารณาการพหุนามกับพหุนาม ซึ่งทำได้โดยใช้สมบัติการแจกแจง ดังนี้

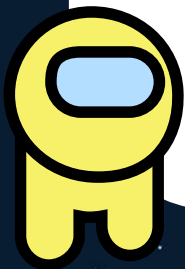
$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 5) &= (x + 2)(x) + (x + 2)(5) \\ &= (x)(x) + (2)(x) + (x)(5) + (2)(5) \\ &= x^2 + 2x + 5x + 10 \\ &= x^2 + 7x + 10\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{หรือ } (x+2)(x+5) &= (x)(x+5) + (2)(x+5) \\ &= (x)(x) + (x)(5) + (2)(x) + (2)(5) \\ &= x^2 + 5x + 2x + 10 \\ &= x^2 + 7x + 10\end{aligned}$$

การหาผลคูณของพหุนามสรุปได้ดังนี้

การหาผลคูณของพหุนามกับพหุนาม ทำได้โดยคูณแต่ละพจน์ของพหุนามหนึ่งกับทุก ๆ พจน์ของอีกพหุนามหนึ่ง แล้วนำผลคูณเหล่านั้นมาบวกกัน



การคูณระหว่างพหุนามกับพหุนาม

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณ $(x + 4)(3x^2 - x)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณ $(x - 3)(x^2 + 2x - 5)$

วิธีทำ



การคูณระหว่างพหุนามกับพหุนาม

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณ $(x + 7)^2$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณ $(5x + y)^2$

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณ $(x - y)^2(x - y)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลคูณ $(10z - 5y)(-12y^3 - 11)$

วิธีทำ



แบบฝึกทักษะที่ 6.3

3. จงหาผลลัพธ์

1) $(x - 9)(x + 4)$

2) $(x - 5)^2$

3) $(2x - 3)(2x^2 + 1)$

4) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$

5) $(x + y)^2(x + y)$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.3

3. จงหาผลลัพธ์

$$\begin{aligned} 1) (x - 9)(x + 4) &= (x)(x) + (x)(4) + (-9)(x) + (-9)(4) \\ &= x^2 + 4x - 9x - 36 \\ &= x^2 - 5x - 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (x - 5)^2 &= x^2 - 2(x)(5) + 5^2 \\ &= x^2 - 10x + 25 \end{aligned}$$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.3

$$\begin{aligned} 3) (2x - 3)(2x^2 + 1) &= (2x)(2x^2) + (2x)(1) + (-3)(2x^2) + (-3)(1) \\ &= 4x^3 + 2x - 6x^2 - 3 \\ &= 4x^3 - 6x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) (x^2 - xy + y^2)(x + y) &= x^3 - x^2y + xy^2 + yx^2 - xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) (x + y)^2(x + y) &= (x^2 + 2xy + y^2)(x + y) \\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + yx^2 + 2xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{aligned}$$



6.4 การหารพหุคูณด้วยเอกนาม



การหารเอกนามด้วยเอกนาม

ในการหารพหุนาม มีข้อตกลงว่า เอกนามหรือพหุนามที่เป็นตัวหารต้องไม่เป็นศูนย์

พิจารณาการหารเอกนามด้วยเอกนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ ซึ่งทำได้โดยใช้สมบัติของเลขยกกำลัง

$$\begin{aligned} 1. x^3 y^2 \div xy &= \frac{x^3 y^2}{xy} \\ &= x^{3-1} y^{2-1} \\ &= x^2 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. 15x^2 y \div 3xy &= \frac{15x^2 y}{3xy} \\ &= \frac{15}{3} x^{2-1} y^{1-1} \\ &= 5xy^0 \\ &= 5x(1) \\ &= 5x \end{aligned}$$



ในการหารเอกนามด้วยเอกนาม จะนำค่าคงตัวในแต่ละเอกนามมาหารกัน และนำตัวแปรในแต่ละเอกนามมาหารกัน โดยใช้สมบัติของเลขยกกำลัง และเมื่อได้ผลหารเป็นเอกนาม จะกล่าวว่า การหารนั้นเป็น **การหารลงตัว** ซึ่งเป็นไปตามความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\text{ตัวหาร} \times \text{ผลหาร} = \text{ตัวตั้ง}$$



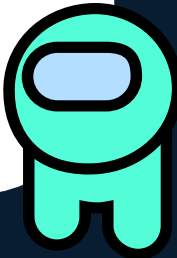
การหารเอกนามด้วยเอกนาม

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลหาร $\frac{-10x}{5}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลหาร $\frac{8y^4}{16y^2}$

วิธีทำ

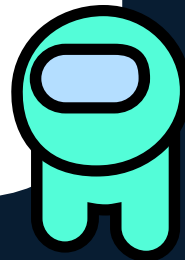


ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลหาร $\frac{2x^{10}}{x^3}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลหาร $\frac{18x^4y^2}{-10x^2y}$

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลหาร

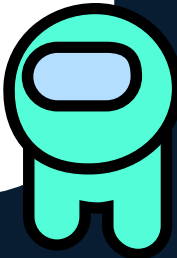
$$\frac{-x^4y^3}{x^2y^2}$$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลหาร

$$\frac{6x^3y^4}{x^3y^2}$$

วิธีทำ



แบบฝึกทักษะที่ 6.4

1. จงหาผลหารต่อไปนี้

$$1) \frac{10a^2}{2a}$$

$$2) \frac{12x^2y}{-3y}$$

$$3) \frac{20xy}{5x}$$

$$4) \frac{-27m^2n^2}{-9mn}$$

$$5) \frac{3xy^2}{2y}$$



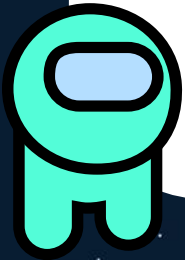
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.4

1. จงหาผลหารต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 1) \frac{10a^2}{2a} &= \left(\frac{10}{2} \right) a^{2-1} \\ &= 5a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{20xy}{5x} &= \left(\frac{20}{5} \right) x^{1-1}y \\ &= 4x^0y \\ &= 4y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{12x^2y}{-3y} &= \left(\frac{12}{-3} \right) x^2y^{1-1} \\ &= -4x^2y^0 \\ &= -4x^2 \end{aligned}$$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.4

$$4) \frac{-27m^2n^2}{-9mn} = \left(\begin{array}{c} -27 \\ -9 \end{array} \right) m^{2-1}n^{2-1}$$
$$= 3mn$$

$$5) \frac{3xy^2}{2y} = \frac{3}{2}xy^{2-1}$$
$$= \frac{3}{2}xy$$



การหารพหุนามด้วยเอกนาม

ในการหารพหุนาม มีข้อตกลงว่า เอกนามหรือพหุนามที่เป็นตัวหารต้องไม่เป็นศูนย์
พิจารณาการหารพหุนามด้วยเอกนามในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 1. (2x + 6) \div 2 &= \frac{2x + 6}{2} \\ &= \frac{2x}{2} + \frac{6}{2} \\ &= x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. (9x^2 + 12x) \div 3x &= \frac{9x^2 + 12x}{3x} \\ &= \frac{9x^2}{3x} + \frac{12x}{3x} \\ &= 3x + 4 \end{aligned}$$



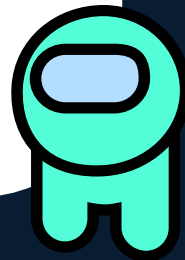
ในการหารพหุคูณด้วยเอกนาม จะหารแต่ละพจน์ของพหุคูณด้วยเอกนาม แล้วนำ
ผลหารเหล่านี้มาบวกกัน และเมื่อได้ผลหารเป็นพหุคูณ จะกล่าวว่าการหารนั้นเป็น
การหารลงตัว ซึ่งเป็นไปตามความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\text{ตัวหาร} \times \text{ผลหาร} = \text{ตัวตั้ง}$$



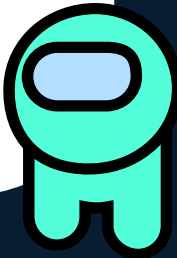
ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลหาร $\frac{15X^3 - 24X^2}{-3X}$

วิธีทำ



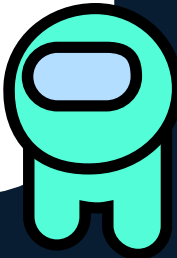
ตัวอย่างที่ 2 จงหารพหุหาร $\frac{3x^4y - 4x^2y + 8xy}{2xy}$

วิธีทำ



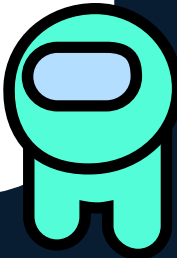
ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลหาร $\frac{21x + 49x^3}{-7x}$

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลหาร $\frac{-18x^3 + 24x^2}{6x^2}$

วิธีทำ



แบบฝึกทักษะที่ 6.4

2. จงหาผลหารต่อไปนี้

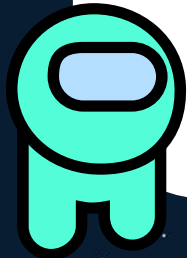
$$1) \frac{-18a^2 - 36}{-9}$$

$$2) \frac{-15x + 12x^3}{-3x}$$

$$3) \frac{8z^3 - 3z^2}{z^2}$$

$$4) \frac{x^2 + 3x^3}{-x^2}$$

$$5) \frac{4x^3y^3 - 6x^2y^4 - 8xy^2}{4xy^2}$$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.4

2. จงหาผลหารต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{-18a^2 - 36}{-9} &= \frac{-18a^2}{-9} - \frac{36}{-9} \\ &= 2a^2 + 4 \end{aligned}$$

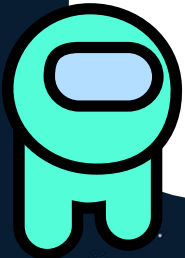
$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{-15X + 12X^3}{-3X} &= \frac{-15X}{-3X} + \frac{12X^3}{-3X} \\ &= 5X^{1-1} - 4X^{3-1} \\ &= 5X - 4X^2 \end{aligned}$$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.4

$$\begin{aligned} 3) \frac{8Z^3 - 3Z^2}{Z^2} &= \frac{8Z^3}{Z^2} - \frac{3Z^2}{Z^2} \\ &= 8Z^{3-2} - 3Z^{2-2} \\ &= 8Z - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{X^2 + 3X^3}{-X^2} &= \frac{X^2}{-X^2} + \frac{3X^3}{-X^2} \\ &= -X^{2-2} - 3X^{3-2} \\ &= -X^0 - 3X \\ &= -1 - 3X \end{aligned}$$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.4

$$\begin{aligned} 5) \frac{4x^3y^3 - 6x^2y^4 - 8xy^2}{4xy^2} &= \frac{4x^3y^3}{4xy^2} - \frac{6x^2y^4}{4xy^2} - \frac{8xy^2}{4xy^2} \\ &= x^{3-1}y^{3-2} - \frac{3}{2}x^{2-1}y^{4-2} - 2x^{1-1}y^{-2} \\ &= x^2y - \frac{3}{2}xy^2 - 2 \end{aligned}$$



